

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ  
НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
«КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ  
імені ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО»

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ-2 НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

*Рекомендовано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського  
як навчальний посібник для студентів,  
які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка»,  
освітньою програмою «Електронні компоненти і системи»*

Київ  
КПІ ім. Ігоря Сікорського  
2020

Теорія електричних кіл - 2: Нелінійні електричні кола. Конспект лекцій [Електронний ресурс]: навч. посіб. для студ. спеціальності 171 «Електроніка», освітньої програми «Електронні компоненти і системи»/ КПІ імені Ігоря Сікорського; уклад.: В. Я. Ромашко, Л. М. Батрак. – Електронні текстові дані (1 файл: 855 Кбайт). – Київ: КПІ імені Ігоря Сікорського, 2019. – 88 с.

*Гриф надано Методичною радою КПІ ім. Ігоря Сікорського (протокол № 10 від 18.06.2020 р.)  
за поданням Вченої ради факультету електроніки (протокол № 05/2020 від 25.05.2020 р.)*

Електронне мережне навчальне видання

# **ТЕОРІЯ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ-2**

## **НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА**

### **КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ**

Укладачі: *Ромашко Володимир Якович, д-р техн. наук, проф.*  
*Батрак Лариса Миколаївна, канд. техн. наук, доц.*

Відповідальний редактор *Вербицький Є.В., канд. техн. наук, доц.*

Рецензенти: *Дрозденко К.С., канд. техн. наук, доц.*

Посібник призначений для студентів, які навчаються за спеціальністю 171 «Електроніка» і тих, хто вивчає електротехніку та електроніку. В посібнику наводяться основні відомості про нелінійні елементи електричного кола, методи розрахунку електричних кіл при дії сталого струму та при періодичних діях та застосування нелінійних елементів електричного кола.

© КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020

## ЗМІСТ

<b>ПЕРЕДМОВА.....</b>	<b>7</b>
<b>РОЗДІЛ І. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА.....</b>	<b>9</b>
<i>Лекція 1. Класифікація електричних кіл.....</i>	<i>9</i>
<b>1.1. Нелінійні кола. Характеристики нелінійних елементів.....</b>	<b>12</b>
<i>Лекція 2. Характеристики ідеалізованих двополюсних елементів електричного кола.....</i>	<i>13</i>
<b>2.1 Резистивний елемент.....</b>	<b>13</b>
<b>2.2 Ємнісний елемент.....</b>	<b>15</b>
<b>2.3 Індуктивний елемент.....</b>	<b>17</b>
<i>Лекція 3. Основні класи нелінійних елементів електричного кола.....</i>	<i>18</i>
<b>3.1. Активні та пасивні елементи.....</b>	<b>18</b>
<b>3.2. Елементи з симетричною та несиметричною характеристиками.....</b>	<b>20</b>
<b>3.3. Вентильні елементи. Ідеальний вентиль.....</b>	<b>22</b>
<b>3.4 Елементи з монотонною та немонотонною характеристиками.....</b>	<b>23</b>
<i>Лекція 4. Нелінійні елементи з немонотонними характеристиками</i>	<i>24</i>
<b>4.1. Немонотонні характеристики керовані струмом та напругою. Некеровані характеристики. Обернення характеристик нелінійних елементів.....</b>	<b>24</b>
<b>4.2. Інерційні нелінійні елементи електричного кола. Умовно нелінійні елементи.....</b>	<b>27</b>
<b>4.3. Керовані елементи електричного кола. Сімейства</b>	

характеристик. Види керуючих факторів. Керуючий електрод.....	28
 <b>РОЗДІЛ II. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ</b>	
<b>СТАЛОГО СТРУМУ.....</b>	<b>31</b>
<i>Лекція 5. Графічні методи розрахунку електричних кіл з</i> <i>нелінійними елементами.....</i>	<i>31</i>
<b>5.1. Метод додавання характеристик.....</b>	<b>32</b>
<b>5.1.1. Послідовне з'єднання елементів.....</b>	<b>32</b>
<b>5.1.2 Паралельне з'єднання елементів .....</b>	<b>34</b>
<b>5.1.3. Змішане з'єднання елементів.....</b>	<b>35</b>
<i>Лекція 6. Метод додавання для немотонних характеристик.....</i>	<i>36</i>
<b>6.1. Особливості режиму роботи нелінійних кіл, що містять</b> <b>нелінійні елементи з немонотонною вольтамперною</b> <b>характеристикою.....</b>	<b>36</b>
<b>6.2. Вольтамперні характеристики ділянок електричного</b> <b>кола, які містять нелінійний елемент та джерело напруги або</b> <b>струму.....</b>	<b>38</b>
<i>Лекція 7. Метод пересікання та його застосування.....</i>	<i>41</i>
<b>7.1. Визначення робочої точки нелінійного елемента</b> <b>електричного кола.....</b>	<b>43</b>
<b>7.2. Розрахунок складного електричного кола, який містить</b> <b>лише один нелінійний елемент.....</b>	<b>45</b>
<i>Лекція 8. Застосування еквівалентних схем при розрахунку</i> <i>нелінійних кіл.....</i>	<i>46</i>
<b>8.1 Розрахунок нелінійного кола при малій зміні струмів та</b> <b>напруг (метод лінеаризації характеристик).....</b>	<b>46</b>
<b>8.2. Схема заміщення ділянки вольт-амперної</b> <b>характеристики з негативним диференціальним опором.....</b>	<b>51</b>
<i>Лекція 9. Розрахунок нелінійних кіл сталого струму аналітичними</i>	

<b>методами.....</b>	<b>53</b>
<b>9.1. Апроксимація вольтамперних характеристик нелінійних елементів.....</b>	<b>53</b>
<b>9.1.1 Поліноміальна апроксимація.....</b>	<b>54</b>
<b>9.1.2 Апроксимація трансцендентними функціями.....</b>	<b>55</b>
<b>9.1.3 Кусочно-лінійна апроксимація.....</b>	<b>55</b>
<b>Лекція 10. Дискретно-лінійні схеми заміщення нелінійних елементів.....</b>	<b>58</b>
<b>10.1 Приклад аналітичного розрахунку нелінійного кола.....</b>	<b>60</b>
<b>10.2 Чисельні методи розрахунку.....</b>	<b>61</b>
 <b>РОЗДІЛ III. НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ ДІЯХ.....</b>	<b>62</b>
<b>Лекція 11. Розрахунок нелінійних кіл змінного струму.....</b>	<b>62</b>
<b>11.1. Статичні та динамічні характеристики нелінійних елементів.....</b>	<b>62</b>
<b>11.2. Методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму.....</b>	<b>64</b>
<b>11.2.1. Метод проекцій.....</b>	<b>64</b>
<b>Лекція 12. Передавальні характеристики електричного кола.....</b>	<b>66</b>
<b>12.1. Аналітичні методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму.....</b>	<b>70</b>
<b>Лекція 13. Перетворення спектру сигналу електричними колами.....</b>	<b>71</b>
<b>13.1. Лінійні кола.....</b>	<b>71</b>
<b>13.2. Лінійні параметричні кола.....</b>	<b>72</b>
<b>13.3. Нелінійні кола.....</b>	<b>74</b>
<b>13.4. Дія на нелінійний елемент гармонічного сигналу.....</b>	<b>75</b>

13.5. Дія на нелінійний елемент суми двох гармонічних сигналів.....	76
13.6. Метод еквівалентних синусоїд.....	78
 <b>РОЗДІЛ IV. ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА.....</b>	<b>79</b>
<i>Лекція 14. Перетворення форми електричних сигналів за допомогою нелінійних кіл.....</i>	<i>79</i>
14.1. Нелінійні кола сталого струму.....	79
14.1.1. Параметричний стабілізатор.....	79
14.1.2 Мостова схема порівняння .....	80
14.2. Нелінійні кола змінного струму при дії змінної напруги однієї частоти.....	80
14.2.1. Обмеження амплітуди та стабілізація діючого значення напруги.....	80
14.2.2 Випрямлення змінної напруги.....	81
14.2.3 Помноження частоти вхідного сигналу.....	81
14.2.4 Релейний ефект.....	82
14.2.5. Гістерезис.....	83
14.3. Дія на нелінійний ланцюг двох джерел напруги з різними частотами.....	83
14.3.1. Одночасна дія джерел сталого та змінного струму....	83
14.3.2. Зміщення початкової робочої точки .....	84
14.4 Принципи отримання модульованих коливань.....	85
14.5. Електронні ключі.....	85
<b>СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ</b>	<b>88</b>

## **ПЕРЕДМОВА**

Лекції, що насправді навчають,  
ніколи не будуть популярними;  
лекції, що є популярними,  
ніколи не будуть навчати.  
(М. Фарадей)

Нелінійні прилади та пристрої мають широке застосування в електротехніці та електроніці. Робота багатьох реальних пристроїв заснована на використанні явищ та властивостей, що притаманні лише нелінійним електричним колам. З кожним роком розширюється сфера застосування традиційних нелінійних приладів, а також розробляються прилади з новими характеристиками та властивостями. Тому знання основних положень теорії нелінійних кіл, а також розуміння процесів, що в них відбуваються, є дуже важливим для майбутніх спеціалістів в галузі електроніки.

Головною особливістю нелінійних кіл є складність та багатогранність процесів, що в них протікають. В той же час, на відміну від лінійних кіл, для нелінійних відсутні загальні методи аналізу. Це пов'язано з тим, що на відміну від лінійних, в нелінійних колах не виконується принцип накладання, на якому базується більшість методів розрахунку лінійних електричних кіл. Як правило, будь-яку конкретну задачу аналізу нелінійного кола можна розв'язати застосувавши декілька різних методів, кожен з яких дає можливість більш чітко виявити якусь з особливостей процесів, що протікають.

Процеси в нелінійних електричних колах описуються нелінійними алгебраїчними або диференційними рівняннями. Як відомо, не існують які-небудь загальні методи розв'язання таких рівнянь, навіть для рівнянь I-го порядку. Тому для аналізу таких кіл широко застосовуються наближені методи, які дійсні для обмеженого класу рівнянь, а також чисельні методи рішення. На відміну від лінійних кіл, усяка зміна форми або амплітуди вхідної дії, як

правило приводить до нової задачі, яка має зовсім інше рішення, ніж попередня.

Завданням інженерного аналізу є не тільки визначення струмів та напруг в окремих елементах електричного кола при заданій вхідній дії. Він також повинен давати можливість оцінити ступінь впливу на протікаючі процеси окремих елементів та їх характеристик, структури електричного кола, а також вказати яким шляхом можна змінити реакцію кола в потрібному напрямку. З цієї точки зору дуже важливе значення мають якісні та наближені методи аналізу.

У цьому навчальному посібнику представлено конспект лекцій з теорії нелінійних електричних кіл, які читаються студентам напряму підготовки 6.050802 «Електронні пристрої та системи». Зважаючи на обмеженість часу, що відводиться на вивчення цієї частини курсу, головну увагу приділено поясненню фізичного смислу протікаючих процесів, а також простоті та наочності метода розрахунку. Методи, що розглядаються, дають можливість оцінити явища без їх точного кількісного аналізу, який в разі потреби завжди можна провести чисельними методами на комп'ютері. Для більш глибокого розуміння розглянутих питань, можна скористатись літературою, список якої наведено нижче.



## РОЗДІЛ І. ЗАГАЛЬНІ ВІДОМОСТІ ПРО НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА

### Лекція 1. Класифікація електричних кіл

У загальному випадку електричний ланцюг можна розглядати як чотириполюсник, на вході якого є якась дія  $x(t)$ , наслідком якої є реакція на виході  $y(t)$  (рис.1.1).

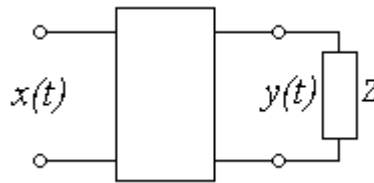


Рис. 1.1

Цю реакцію можна визначити склавши і розв'язавши диференціальне рівняння кола. Для складання цього рівняння треба за допомогою законів Кірхгофа записати систему рівнянь, яка пов'язує струми та напруги в елементах електричного кола. Потім, шляхом послідовних підстановок треба виключити усі невідомі, крім вихідної реакції  $y(t)$ . Внаслідок цього ми одержуємо одне диференціальне рівняння, порядок якого  $n$  залежатиме від схеми електричного кола та характеру його елементів

$$a_n \frac{dy^n}{dt^n} + a_{n-1} \frac{dy^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x(t). \quad (1.1)$$

Коефіцієнти диференційного рівняння  $a_k$  залежать від параметрів елементів кола  $R$ ,  $L$ ,  $C$  та схеми їх з'єднання. Зокрема, якщо електричний ланцюг складається лише з резистивних елементів, вихідна реакція  $y(t)$  завжди подібна до вхідної дії  $x(t)$  і диференціальне рівняння (1.1) переходить в алгебраїчне

$$a_0 y(t) = x(t). \quad (1.2)$$

**Приклад.** На вході кола діє напруга  $u_{\text{вх}}(t)$ . Визначити напругу на виході  $u_{\text{вих}}(t)$  (рис.1.2).

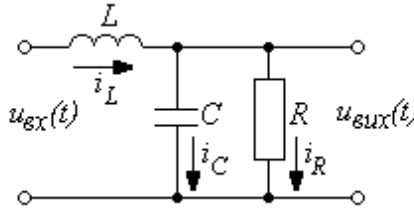


Рис. 1.2.

Згідно II-му закону Кірхгофа можна записати

$$u_{\text{вх}} = u_L + u_{\text{вих}} = L \frac{di_L}{dt} + u_{\text{вих}}.$$

Відповідно до I-го закону Кірхгофа

$$i_L = i_C + i_R,$$

причому  $i_R = \frac{u_{\text{вих}}}{R}$ ;  $i_C = C \frac{du_{\text{вих}}}{dt}$ .

Отже

$$u_{\text{вх}}(t) = L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du_{\text{вих}}}{dt} + \frac{u_{\text{вих}}}{R} \right) + u_{\text{вих}} = LC \frac{d^2 u_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_{\text{вих}}}{dt} + u_{\text{вих}}$$

або  $LC \frac{d^2 u_{\text{вих}}}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_{\text{вих}}}{dt} + u_{\text{вих}} = u_{\text{вх}}(t).$

Таким чином одержане рівняння відповідає рівнянню (1.1) з урахуванням того, що  $x(t) = u_{\text{вх}}(t)$ ;  $y(t) = u_{\text{вих}}(t)$ .

Залежно від характеру елементів кола, а отже і характеру рівняння (1.1) електричні кола ділять на чотири типи:

- 1) лінійні;
- 2) лінійні параметричні;
- 3) нелінійні;
- 4) нелінійні параметричні.

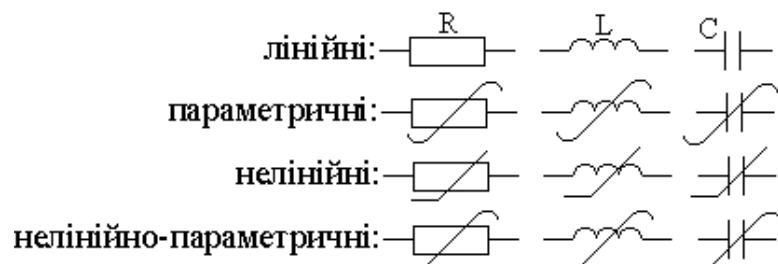
1. Лінійні коламістять тільки лінійні елементи електричного кола, тобто такі елементи, параметри яких залишаються сталими і не залежать від струму, напруги та часу. Такі кола описують лінійними диференціальними або алгебраїчними рівняннями виду (1.1), коефіцієнти в яких є сталими:  $a_k = const$ . Прикладами лінійних кіл є коливальні контури, фільтри, довгі лінії та ін.

2. Лінійні параметричні коламістять хоча б один параметричний елемент, тобто такий елемент, параметри якого залежать від часу. Такі кола описують лінійними диференціальними рівняннями виду (1.1), у яких хоча б один коефіцієнт залежить від часу:  $a_k(t)$ . Прикладами параметричних кіл є кола, що містять який-небудь сенсор (давач), параметри якого змінюються у часі при зміні будь якої зовнішньої дії (мікрофон, терморезистор, фоторезистор, тензорезистор і т.п.).

3. Нелінійні коламістять хоча б один нелінійний елемент, параметри якого залежать від струму або напруги. Такі кола описують нелінійними диференціальними рівняннями виду (1.1), у яких хоча б один коефіцієнт залежить від струму або напруги:  $a_k(u, i)$ . Прикладом нелінійних елементів електричного кола є практично усі електронні та напівпровідникові прилади, котушки з феромагнітним осердям та багато інших елементів.

4. Нелінійні параметричні коламістять нелінійні (та) параметричні елементи. Їх описують нелінійними рівняннями зі змінними коефіцієнтами виду (1.1), в яких коефіцієнти залежать від струму, напруги та часу  $a_k(u, i, t)$ ; або  $a_k(u, i); a_p(t)$ .

Умовні позначення перерахованих елементів електричного кола є такими



### 1.1. Нелінійні кола. Характеристики нелінійних елементів

В теорії лінійних кіл припускають, що параметри елементів електричного кола – опори, індуктивності та ємності є сталими величинами, які не залежать від струму, напруги та часу. Такі елементи називають лінійними. Однак фактично, лінійних елементів в природі не існує. Наприклад, при протіканні струму у провіднику в ньому виділяється енергія, потужність якої пропорційна квадратові струму ( $P = I^2 R$ ). При цьому температура провідника змінюється, а отже змінюється і його опір. З плином часу відбувається зміна властивостей матеріалів. Отже параметри елементів будуть змінюватися і у часі.

Проте є досить велика група реальних елементів, для яких, в широкому діапазоні зміни струму та напруги, параметри залишаються практично сталими. Такі елементи електричного кола можна розглядати як лінійні. Електричний ланцюг називають лінійним, якщо він містить тільки лінійні елементи.

Існує дуже велика група елементів електричного кола, параметри яких суттєво залежать від струмів та напруг. Такі елементи називають нелінійними. Якщо електричний ланцюг містить хоча б один такий елемент, такий ланцюг є нелінійним.

На відміну від лінійного елемента, нелінійний елемент не можна описати якимось одним сталим параметром, наприклад опором, індуктивністю або ємністю. Для кількісного описання властивостей нелінійних елементів треба визначити певні залежності, які називають характеристиками елементів. Найчастіше характеристики реальних нелінійних елементів одержують експериментально і подають у вигляді графіків.

## **Лекція 2. Характеристики основних ідеалізованих двополюсних елементів електричного кола**

### 2.1. Резистивний елемент

Властивості нелінійного резистивного елемента повністю визначаються залежністю між струмом та напругою на його виводах  $u = f(i)$  або  $i = f(u)$ .

Ця залежність називається вольт-амперною характеристикою. На рис. 2.1 наведено ВАХ лінійного елемента (1) та нелінійних елементів (2, 3). Для лінійного резистора відношення  $\frac{u}{i} = R$  в будь якій точці характеристики є сталою величиною, яка чисельно дорівнює омичному опору елемента  $R$ .

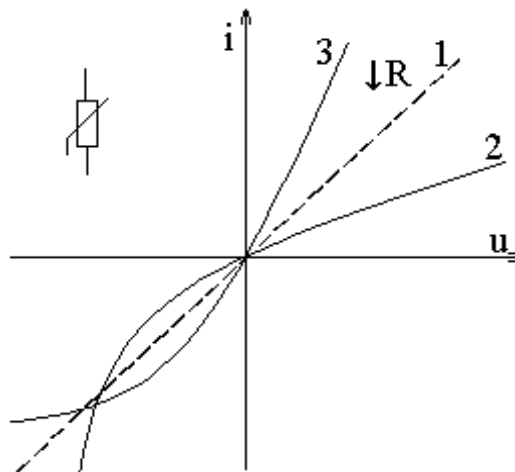


Рис. 2.1.

Для нелінійного резистора відношення  $\frac{u}{i}$  у різних точках характеристики буде різним. Тому для опису нелінійного резистивного елемента у певній робочій точці його характеристики вводять два параметри:

- статичний опір;
- диференційний опір.

Нехай режим роботи нелінійного резистора визначається робочою точкою  $A$  (рис. 2.2). Відношення напруги в робочій точці  $U_A$  до струму  $I_A$  у цій же точці називають статичним опором нелінійного елемента в робочій точці  $A$

$$r_{cm_A} = \frac{U_A}{I_A} = k \operatorname{tg} \alpha, \quad (2.1)$$

де  $k$  – коефіцієнт пропорційності, який дорівнює відношенню масштабів, що вибрані по осям напруги та струму.

$$\kappa = \frac{m_U [B / \text{поділку}]}{m_I [A / \text{поділку}]} \text{ Ом.} \quad (2.2)$$

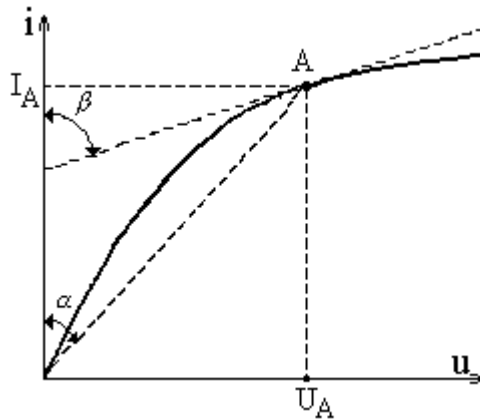


Рис. 2.2.

При розрахунку нелінійних кіл більш суттєве значення має не статичний, а диференційний опір нелінійного елемента.

Диференційним опором називають відношення нескінченного малої  $du$ , або досить малої  $\Delta U$  зміни напруги до відповідної зміни струму  $di(\Delta I)$  у робочій точці  $A$ . Цей опір пропорційний тангенсу кута  $\beta$  між дотичною до  $ВАХ$  у точці  $A$  та віссю струмів

$$r_{\text{диф}} = \frac{du_A}{di_A} = \frac{\Delta U_A}{\Delta I_A} = k \operatorname{tg} \beta, \quad (2.3)$$

де  $k$  має те ж саме значення, що і при визначенні статичного опору (рис.2.2).

Із наведеного визначення випливає, що для лінійного резистора в усіх точках  $ВАХ$  статичний опір співпадає з диференційним і дорівнює його омічному опору

$$r_{\text{см}} = r_{\text{д}} = \frac{du}{di} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = R.$$

Таким чином, на відміну від лінійних елементів, у нелінійному елементі при сталому та змінному струмі треба користуватися відповідно статичним та диференційним опором:

Лінійний елемент

$$\begin{cases} U = IR; \\ \Delta u = \Delta i R. \end{cases} \quad (2.4)$$

### Нелінійний елемент

$$\begin{cases} U = I r_{cm}; \\ \Delta u = \Delta i r_{\partial}. \end{cases} \quad (2.5)$$

## 2.2. Ємнісний елемент

Властивості ємнісного елемента повністю визначаються залежністю між зарядом  $q$  та напругою  $u$  на його обкладках. Ця залежність називається кулон-вольтовою характеристикою (рис.2.3)

$$q = f(u) \text{ або } u = f(q),$$

$$\text{де } q = \int_{-\infty}^t i dt; \quad i = \frac{dq}{dt}.$$

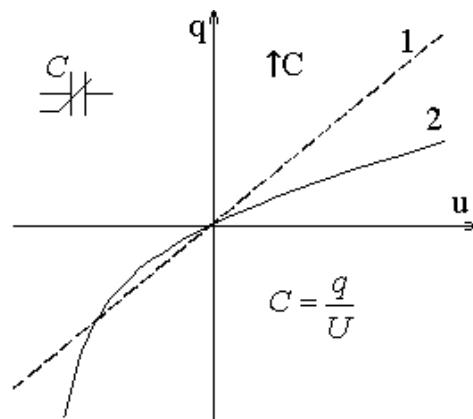


Рис. 2.3.

Характеристика лінійної ємності (1) являє собою пряму лінію, нахил якої залежить від величини ємності  $C = \frac{q}{U}$ .

Характеристика нелінійної ємності (2) є нелінійною. Тому аналогічно нелінійному резистору для кожної робочої точки вводять поняття статична та диференційна ємність

$$C_{ст} = \frac{q_A}{U_A}; \quad C_{диф} = \frac{dq_A}{du_A} \cong \frac{\Delta q_A}{\Delta u_A}. \quad (2.6)$$

У нелінійній ємності накопичений заряд залежить від прикладеної напруги, причому ця залежність є нелінійною  $q = f(u)$ .

Якщо до нелінійної ємності прикласти напругу, що змінюється,  $u = \varphi(t)$ , заряд  $q$  буде визначатися, як складна функція від часу

$$q = f[\varphi(t)].$$

Для визначення струму через нелінійну ємність  $i(t) = dq/dt$ , треба продиференціювати наведену вище складну функцію

$$i(t) = \frac{dq}{du} \cdot \frac{du}{dt}. \quad (2.7)$$

Згідно визначенню  $dq/du$  є диференційною ємністю конденсатора, величина якої залежить від робочої точки, тобто величини прикладеної напруги

$$\frac{dq}{du} = C_{диф}(u).$$

Враховуючи це, струм через нелінійну ємність буде визначатися з виразу

$$i_C(t) = C_{диф}(u) \cdot \frac{du}{dt}. \quad (2.8)$$

Залежність  $C_{диф}(u)$  називають вольт-фарадною характеристикою.

Прикладом нелінійної ємності є варикап, характеристику якого наведено на рис. 2.4.



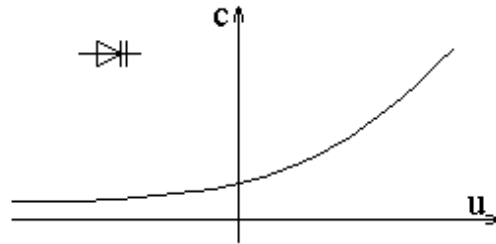


Рис. 2.4.

### 2.3. Індуктивний елемент

Властивості індуктивного елемента повністю визначаються залежністю між потокозчепленням  $\psi$  та струмом  $i$ . Ця залежність називається вебер-амперною характеристикою (рис. 2.5).

$$\psi = f(i); i = f(\psi),$$

$$\text{де } \psi = \int_{-\infty}^t u dt; \quad u = \frac{d\psi}{dt}.$$

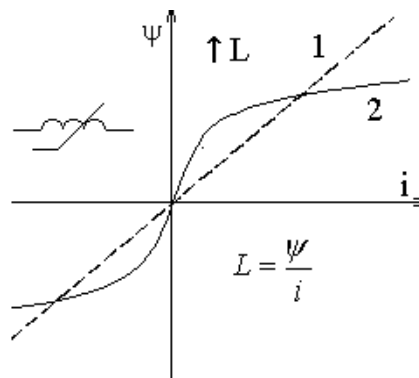


Рис. 2.5

Характеристика лінійної індуктивності (1) являє собою пряму лінію, нахил якої залежить від величини індуктивності  $L = \frac{\psi}{i}$ .

Характеристика нелінійної індуктивності (2) є нелінійною. Для кожної її точки можна визначити статичну та диференціальну індуктивність

$$L_{cm} = \frac{\psi_A}{i_A}; \quad L_{dиф} = \frac{d\psi_A}{di_A} \cong \frac{\Delta\psi_A}{\Delta i_A}. \quad (2.9)$$

У нелінійній індуктивності потокозчеплення  $\psi$  нелінійно залежить від струму  $\psi = f(i)$ .

Якщо в нелінійній індуктивності протікає змінний струм,  $i = \varphi(t)$ , то потокозчеплення буде складною функцією часу

$$\psi = f[\varphi(t)].$$

Для знаходження напруги самоіндукції на нелінійній індуктивності  $u(t) = d\psi/dt$ , треба продиференціювати цю складну функцію

$$u(t) = \frac{d\psi}{di} \cdot \frac{di}{dt}. \quad (2.10)$$

Згідно визначенню  $d\psi/di$  є диференційною індуктивністю котушки, величина якої залежить від робочої точки, тобто протікаючого струму

$$\frac{d\psi}{di} = L_{\text{диф}}(i).$$

Враховуючи це, напруга на нелінійній індуктивності буде визначатися виразом

$$u(t) = L_{\text{диф}}(i) \cdot \frac{di}{dt}. \quad (2.11)$$

Прикладом нелінійних індуктивностей є котушки з феромагнітним осердям.

### **Лекція 3. Основні класи нелінійних елементів електричного кола**

#### **3.1. Активні та пасивні елементи**

Властивості нелінійного елемента електричного кола повністю визначаються його характеристикою. Оскільки характеристики реальних елементів мають різну форму й можуть довільно розміщуватися на площині

системи координат. Розглянемо різні класифікації нелінійних елементів, які дозволяють об'єднати усю багатоманітність реальних елементів у декілька класів, які мають подібні властивості. Будемо розглядати резистивні елементи електричного кола.

Залежно від розміщення  $BAX$   $HE$  на площині  $(u, i)$  нелінійні елементи ділять на два типи

- пасивні;
- активні.

Якщо графік  $BAX$  розміщений у 1-у і 3-у квадрантах системи координат і проходить через її початок, такий  $HE$  називають пасивним (рис.3.1.а).

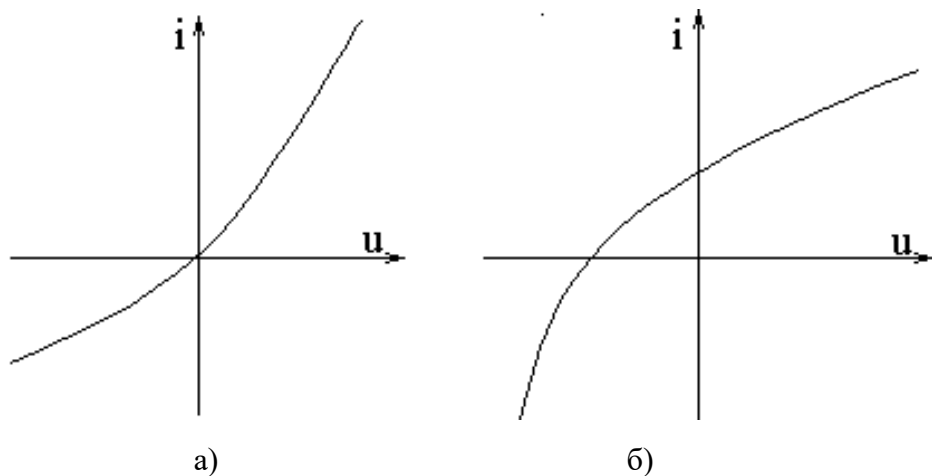


Рис. 3.1.

У пасивному елементі полярність струму та напруги завжди співпадають і потужність, що споживається  $p = ui \geq 0$ . Це означає, що такий елемент здатен тільки споживати енергію, що надходить від стороннього джерела (пасивний елемент).

Якщо частина графіка  $BAX$  потрапляє у другий або четвертий квадрант системи координат, такий елемент є активним (рис.3.1.б) У другому та четвертому квадрантах полярність напруги та струму протилежні. Отже, потужність, що споживається  $p = ui < 0$ . Це означає, що при такому режимі роботи елемент не споживає енергію, а навпаки, віддає її у зовнішнє коло. Це

може бути у тому випадку, коли в елементі (електричному ланцюзі) є джерело енергії, або елемент здатен перетворювати неелектричні види енергії в електричну.

Наприклад,  $VAX$  фотодіода (рис.3.2) при його освітленні ( $\Phi > 0$ ) буде частково розміщуватися у ІҮ квадранті.

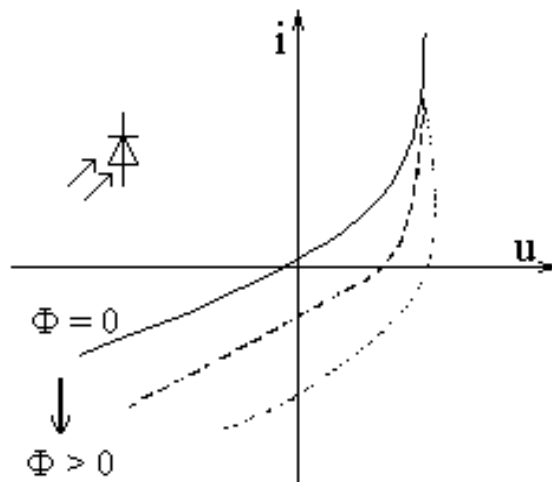


Рис. 3.2

Це говорить про те, що при освітленні фотодіод може виконувати функцію перетворення енергії випромінювання в електричну енергію і віддавати її у зовнішнє коло. Таким чином, фотодіод при певних умовах є генератором електричної енергії.

### 3.2. Елементи з симетричною та несиметричною характеристиками

Залежно від виду  $VAX$  та способу її розміщення відносно початку системи координат розрізняють  $HE$ :

- з симетричною характеристикою (рис. 3.3);
- з несиметричною характеристикою (рис. 3.4).

$VAX$  симетричного  $HE$  симетрична відносно початку координат, тобто для неї виконується умова  $i(u) = -i(-u)$  (функція непарна).

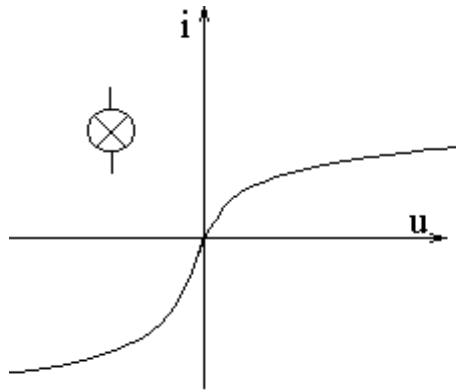


Рис. 3.3

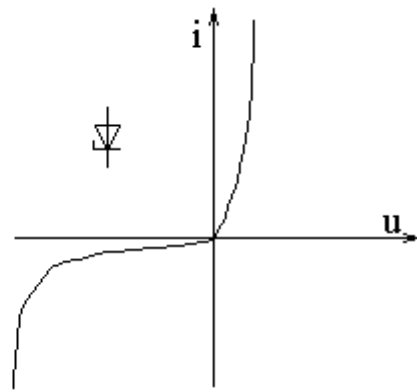


Рис. 3.4.

Якщо ж ця умова не виконується, то  $ВАХ\ НЕ$  є несиметричною.

Для симетричного  $НЕ$  залежність опору від прикладеної напруги однакова для будь-якої полярності прикладеної напруги. Для несиметричного  $НЕ$  закон зміни опору буде різним у залежності від полярності прикладеної напруги. Таким чином для симетричного  $НЕ$  перемикання його виводів відносно джерела живлення не змінює вигляд  $ВАХ$ . Елементи, які мають таку властивість, називають двосторонніми.

Якщо елемент має несиметричну характеристику, то при перемиканні його виводів відносно джерела живлення, полярність струму та напруги одночасно змінюється на протилежну (рис.3.5). Це означає, що повинні взаємно помінятися позитивні та негативні осі системи координат. Отже характеристику  $НЕ$  при перемиканні його виводів можна одержати, розвернувши осі системи координат на  $180^\circ$  відносно початку системи координат.

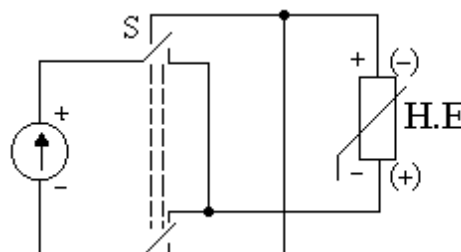


Рис. 3.5

Відповідні точки  $a - a'$ ,  $b - b'$  вихідної 1 та нової 2 характеристики (рис.3.6) лежать на прямій лінії, що проходить через початок системи координат на однаковій відстані. Таким чином тільки симетрична характеристика залишається незмінною при перемиканні виводів  $HE$  відносно джерела енергії.

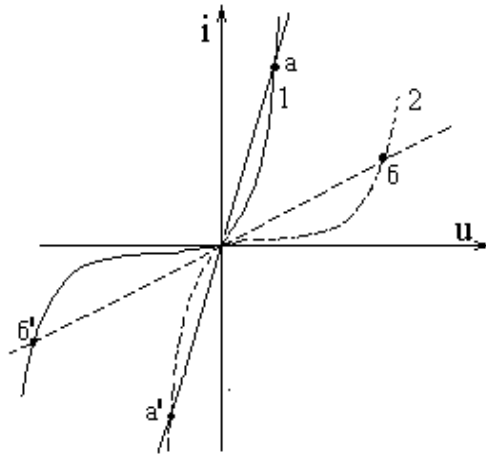


Рис. 3.6

### 3.3. Вентильні елементи. Ідеальний вентиль

Ступінь несиметрії  $HE$  може бути різною. Крайнім випадком несиметричного  $HE$  є елемент, опір якого суттєво залежить від полярності прикладеної напруги. Такий  $HE$  називають електричним вентилем. Прикладом вентильного елемента електричного кола є напівпровідниковий діод (рис. 3.7). У теорії нелінійних кіл поряд з ідеалізованим резистивним, індуктивним та ємнісним елементом, ідеальним джерелом напруги та струму вводять також ідеальний вентиль.

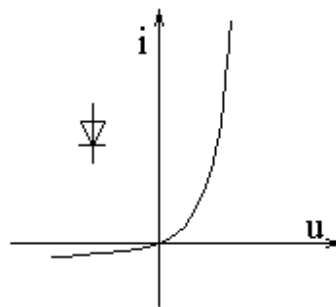


Рис. 3.7

Аналітично  $ВАХ$  ідеального вентиля можна записати таким чином

$$\begin{cases} u = 0 & \text{при } i > 0; \quad (r = 0); \\ i = 0 & \text{при } u < 0; \quad (r = \infty). \end{cases}$$

Потужність, що споживається ідеальним вентилям дорівнює нулю при будь-якому значенні напруги та струму:  $p = ui = 0$ .

Оскільки ідеальний вентиль є елементом з несиметричною  $ВАХ$ , її вигляд залежить від полярності включення відносно джерела живлення (рис.3.8).

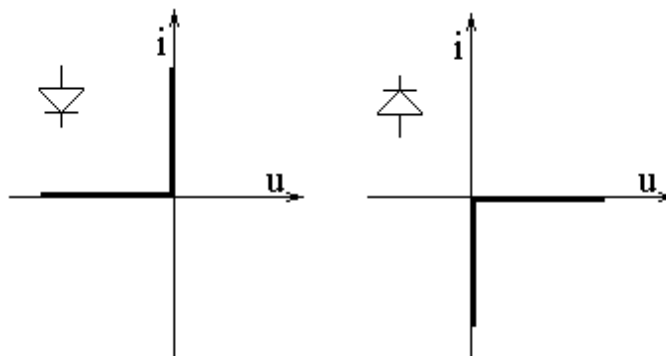


Рис. 3.8

### 3.4. Елементи з монотонною та немонотонною характеристиками

Залежно від характеру зміни  $ВАХ$ ,  $НЕ$  ділять на

- $НЕ$  з монотонною характеристикою (рис. 3.9);
- $НЕ$  з немонотонною характеристикою (рис. 3.10)

Для монотонної характеристики знак похідної в усіх точках однаковий (не змінюється). Для резистивного  $НЕ$  це означає, що диференційний опір

$r_{\text{диф}} = \frac{du}{di}$  завжди має один знак (позитивний).  $ВАХ$  лінійного резистора є

одним з випадків елементів з монотонною характеристикою.

Якщо  $ВАХ$   $НЕ$  немонотонна, то на ній є ділянки, на яких похідна змінює свій знак. Для резистивного нелінійного елемента це відповідає наявності ділянок, на яких диференційний опір є негативним.

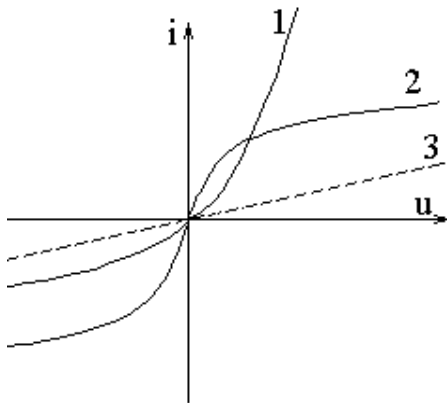


Рис. 3.9

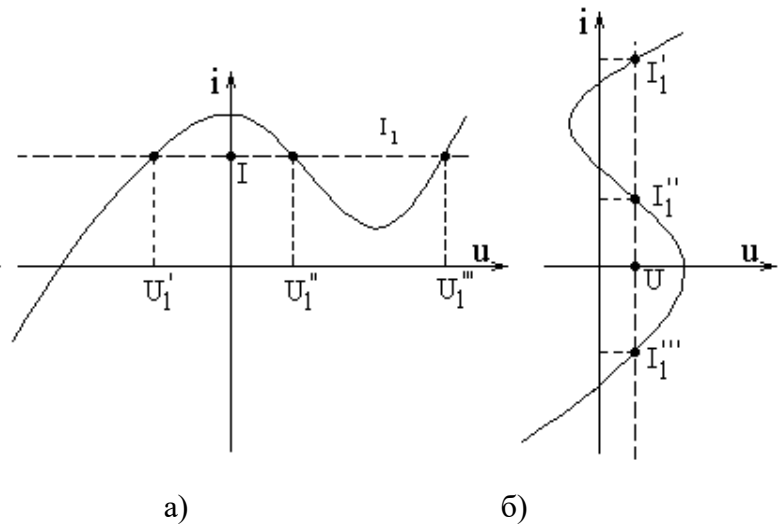


Рис. 3.10.

#### Лекція 4. Нелінійні елементи з немонотонними характеристиками

##### 4.1. Немонотонні характеристики керовані струмом та напругою. Некеровані характеристики. Обернення характеристик нелінійних елементів

Серед немонотонних характеристик у свою чергу виділяють два типи характеристик.

- а) характеристики керовані напругою ( $N$  - подібні) (рис. 3.10, а);
- б) характеристики керовані струмом ( $S$  - подібні) (рис. 3.10, б).

Якщо  $BAX_{HE}$  керована напругою ( $N$  - подібна), то при будь-якому значенні прикладеної напруги, напруга однозначно визначає струм через  $HE$ . В той же час, при заданому струмі напруга на  $HE$  не завжди може бути визначена однозначно.

Якщо  $BAX_{HE}$  керована струмом ( $S$  - подібна), то при будь-яких значеннях струму, напруга на  $HE$  визначається однозначно. В той же час, при заданій напрузі струм через  $HE$  не завжди визначається однозначно.

У принципі можлива некерована  $BAX_{HE}$  (рис. 4.1), для якої на певних ділянках є характерною багатозначність, як для струму, так і напруги.



Прикладом некерованої  $ВАХ$   $НЕ$  є характеристика типу гістерезис (рис. 4.2). На ділянці всередині петлі гістерезису характерна двозначність, як по струму, так і по напрузі. Проте, якщо відомий попереднє положення робочої точки, багатозначність ліквідується, оскільки при зростанні та спаданні напруги робоча точка переміщується різними ділянками  $ВАХ$ .

Монотонність або немонотонність  $ВАХ$  має велике значення для аналізу нелінійних кіл, оскільки при аналізі доводиться оперувати із залежностями  $u = f(i)$  та  $i = f(u)$ . Якщо  $ВАХ$   $НЕ$  немонотонна, то при аналізі кола можуть з'явитися рівняння з багатозначними функціями.

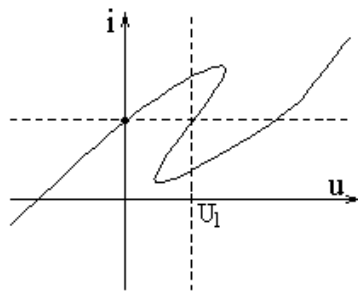


Рис. 4.1

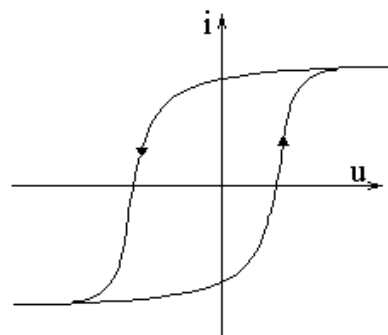


Рис. 4.2.

При аналізі подібних кіл доцільно задавати  $ВАХ$  у такому вигляді, щоб по відношенню до незалежної змінної  $ВАХ$   $НЕ$  була однозначною. Якщо характеристика  $НЕ$  задана як  $i = f(u)$ , то подання її у вигляді  $u = f(i)$  називається оберненням характеристики. Для цього вихідне рівняння характеристики треба розв'язати відносно нової змінної.

**Приклад.**  $i = Au^2$ ;  $u = \sqrt{i/A}$ . Якщо характеристика задана у вигляді графіка, обернення характеристики здійснюється графічно (рис.4.3).

Для цього взаємно міняються місцями осі напруги та струму. Потім графік  $ВАХ$  повертають відносно початку координат на  $90^\circ$  проти ходу годинникової стрілки, а потім весь графік повертають на  $180^\circ$  відносно вертикальної осі. При цьому вихідна та обернена характеристики будуть

розміщені симетрично відносно прямої, що проходить через початок системи координат під кутом  $45^\circ$ . Таким чином, для побудови оберненої характеристики треба відобразити вихідну характеристику відносно прямої, що проходить через початок координат під кутом  $45^\circ$ .

Як видно з графіків, якщо вихідна характеристика 1 відносно незалежної змінної є багатозначною функцією, то обернена характеристика 2 є однозначною функцією відносно нової незалежної змінної.

Обернення *ВАХ НЕ* з немонотонною характеристикою представлено на рис. 4.4.

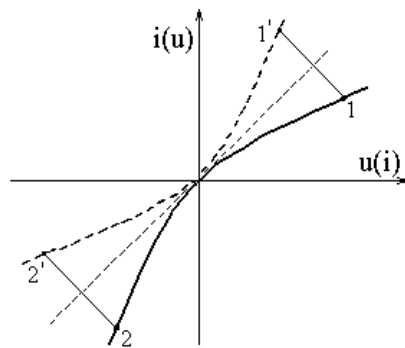


Рис. 4.3

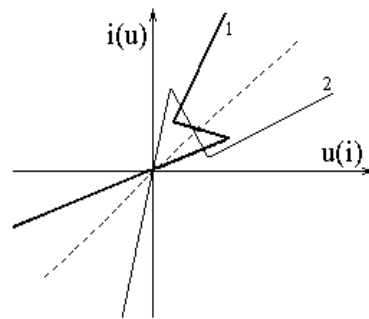


Рис. 4.4

Прикладом реальних елементів з розглянутими типами характеристик є варистор (рис. 4.5, а), тунельний діод (рис. 4.5, б) та диністор (рис. 4.5, в).

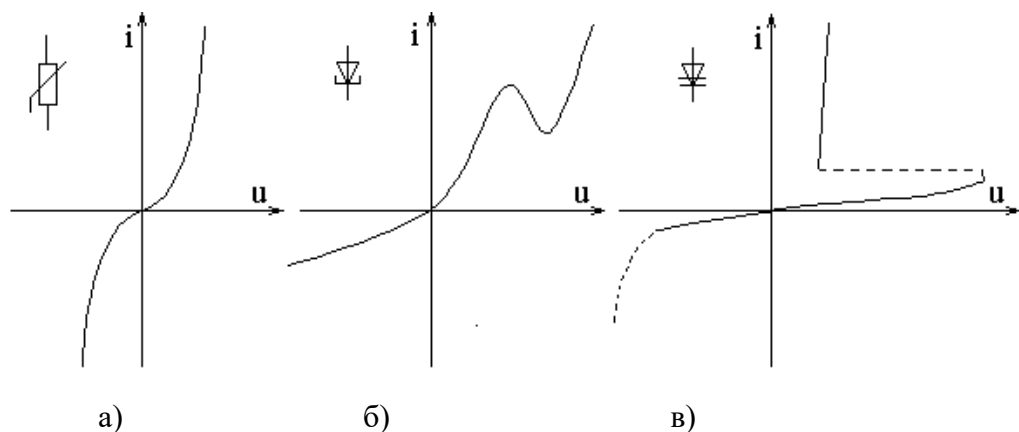


Рис. 4.5

#### 4.2. Інерційні елементи електричного кола. Умовно нелінійні елементи

Характерною особливістю деяких *НЕ* при їх роботі в колах змінного струму є їх значна інерційність, яка проявляє себе у відносно повільній зміні їх опору при зміні протікаючого струму. Наприклад, лампа розжарювання має помітну теплову інерцію. Якщо струм у лампі розжарювання змінюється з достатньо високою частотою (наприклад частотою мережі 50 Гц), за період напруги мережі,  $t^0$  нитки розжарювання практично не змінюється. Отже і опір лампи залишається практично незмінним. Якщо діюче значення прикладеної напруги є сталим, по відношенню до миттєвих значень напруги, лампу можна вважати лінійним опором. При цьому форма струму в лампі буде співпадати з формою прикладеної напруги. Проте, якщо діюче значення напруги зміниться, то зміниться й  $t^0$  нитки розжарювання, а отже і її опір.

*ВАХ* лампи розжарювання для різних матеріалів нитки розжарювання наведено на рис. 4.6 (1 – вугільна нитка розжарювання, 2 – металева).

Таким чином *ВАХ* лампи розжарювання при повільній зміні струму та напруги, а також для діючих значень є нелінійною.

У той же час при досить швидкій періодичній зміні струму та напруги при сталому значенні їх діючого значення *ВАХ* буде практично лінійною. Характеристики лампи розжарювання при швидкій та повільній зміні прикладеної напруги зображено на рис. 4. 7.

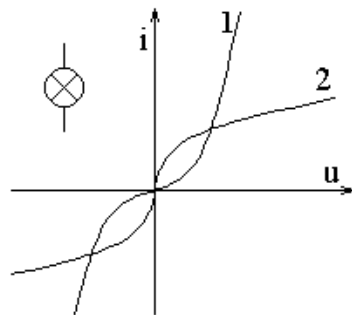


Рис. 4.6

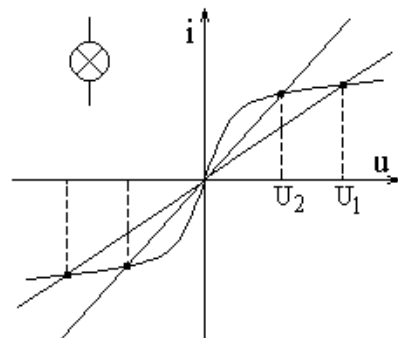


Рис. 4.7

Подібні інерційні нелінійні елементи називають умовно-нелінійними.

Більшість напівпровідникових приладів навіть при досить високих частотах є нелінійними, як по відношенню до діючого, так і миттєвого значення струму та напруги.

#### **4.3. Керовані елементи електричного кола. Сімейства характеристик. Види керуючих факторів. Керуючий електрод**

Опір керованого елемента електричного кола залежить від деякого керуючого фактора (параметра)  $F$ . Цей фактор по відношенню до електричного кола, в яке входить цей елемент, є зовнішнім фактором.

Керуючим фактором може бути будь-яка зовнішня фізична дія: температура, освітлення, тиск, магнітне поле, радіація і т. ін. Керовані елементи дуже часто виконують в електричних пристроях функцію сенсорних елементів (давачів), які перетворюють зміни контрольованої неелектричної величини у відповідну зміну електричної величини (напруги або струму в електричному колі). Оскільки зовнішні контрольовані неелектричні величини, як правило, змінюються у часі, опір таких елементів буде залежати від часу, тобто вони є параметричними елементами електричного кола. Оскільки струм керованого елемента залежить не тільки від прикладеної напруги, але й від керуючого фактора  $F$ , він є функцією двох змінних

$$I = f(U, F).$$

Внаслідок цього, властивості керованого елемента вже не можуть бути відображені за допомогою однієї  $BAX$ . Для повного їх описання треба використовувати трьохмірний простір, у якому характеристика елемента буде являти собою якусь поверхню. Практично властивості керованих елементів відображають не однією, а сімейством  $BAX$ , які знімають при кількох фіксованих значеннях керуючого фактора  $F$ .

Керовані елементи електричного кола (параметричні елементи) можуть бути як лінійними, так і нелінійними. Прикладами таких елементів є фоторезистор (рис. 4.8, а), терморезистор (рис. 4.8, б) та фотодіод (рис. 4.8, в).

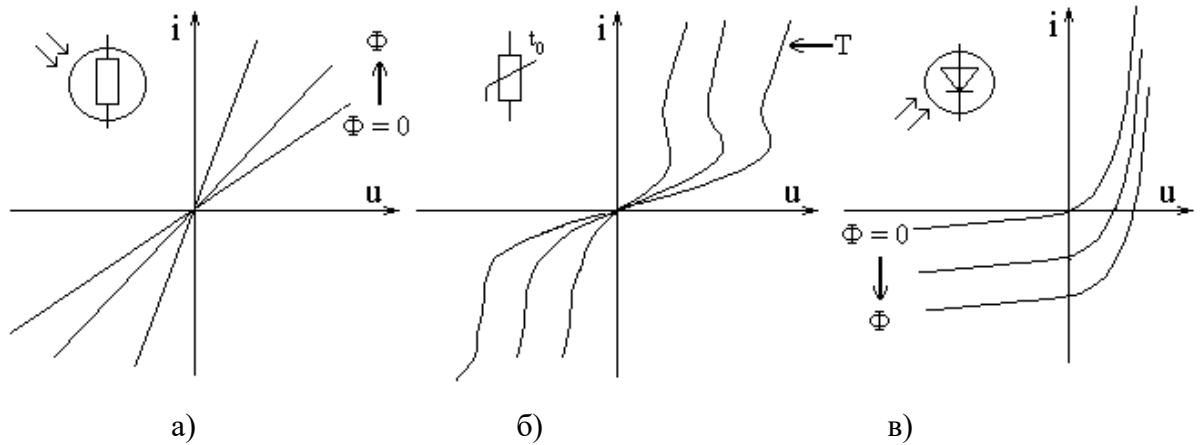


Рис. 4.8

В електронних колах найважливіше значення відіграють керовані елементи, керуючим фактором для яких є електричний сигнал. Такі елементи, крім двох основних (силових) електродів, між якими протікає основний струм, мають додатковий (керуючий) електрод. Струм між силовими електродами в такому елементі залежить не тільки від прикладеної напруги, але й від величини напруги (струму), що подається на керуючий електрод. Отже струм через такий елемент також є функцією двох змінних

$$I = f(U, U_{кер}),$$

а властивості такого елемента відображаються сімейством  $ВАХ$ .

Прикладом подібних елементів є біполярний транзистор (рис. 4. 9), струм колектора якого є функцією двох змінних (рис. 4. 10)

$$I_k = f(U_{ке}, I_{\bar{o}}).$$

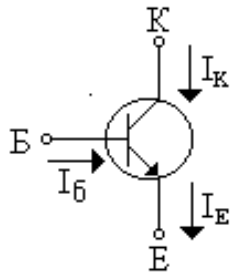


Рис. 4.9

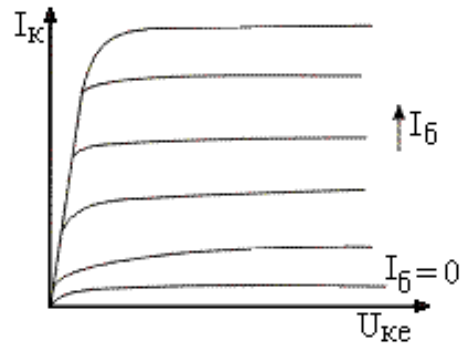


Рис. 4.10

Практично усі сучасні електронні схеми будують з використанням нелінійних елементів електричного кола, насамперед керованих елементів.

## РОЗДІЛ II. НЕЛІНІЙНІ ЕЛЕМЕНТИ В ЕЛЕКТРИЧНИХ КОЛАХ СТАЛОГО СТРУМУ

### **Лекція 5. Графічні методи розрахунку електричних кіл з нелінійними елементами**

У колах сталого струму індуктивні та ємнісні елементи в усталеному режимі можна розглядати відповідно як замикання та розрив ділянки електричного кола. Тому усталені процеси в колах сталого струму визначаються тільки параметрами резистивних елементів. Однією з найважливіших особливостей нелінійних кіл є те, що для них не виконується принцип накладання (суперпозиції). У цьому легко переконатися на прикладі найпростішої залежності.

<u>Лінійний елемент</u>	<u>Нелінійний елемент</u>
$\underline{U = IR}$	$\underline{U = AI^2}$
$I = I_1; U_1 = I_1 R;$	$I = I_1; U_1 = AI_1^2;$
$I = I_2; U_2 = I_2 R;$	$I = I_2; U_2 = AI_2^2;$
$I = I_1 + I_2; U = (I_1 + I_2) \cdot R =$ $= I_1 R + I_2 R = U_1 + U_2.$	$I = I_1 + I_2; U = (I_1 + I_2)^2 R =$ $= AI_1^2 + AI_2^2 + \underline{2AI_1 I_2}.$
	Отже $U \neq U_1 + U_2;$

У зв'язку із цим при аналізі нелінійних кіл не можна застосовувати принцип накладання та методи розрахунку, які базуються на ньому, зокрема, спектральний метод та ряд інших, які широко застосовуються при аналізі лінійних кіл.

У лінійних параметричних колах опір окремих елементів є функцією часу  $R(t)$ . Напруга на такому елементі  $\underline{U = IR(t)}$ .

Якщо

$$I = I_1, \text{ то } U_1 = I_1 R(t);$$

$$I = I_2, \text{ то } U_2 = I_2 R(t);$$

$$I = I_1 + I_2, \text{ то } U = (I_1 + I_2) \cdot R(t) = I_1 R(t) + I_2 R(t) = U_1 + U_2.$$

Таким чином, у лінійних параметричних колах принцип накладання виконується.

Процеси в нелінійних колах сталого струму описуються нелінійними алгебраїчними рівняннями. У загальному випадку ці рівняння можна розв'язати аналітично. Проте у дуже багатьох випадках це пов'язано із значними труднощами, оскільки характер нелінійності елемента може бути різним. Крім того, дуже рідко вдається одержати аналітичний вираз, який би досить точно описував *ВАХ НЕ*. Тому при аналізі нелінійних кіл досить широко застосовують графічні, графоаналітичні та чисельні методи розрахунку.

### **5.1. Метод додавання характеристик**

Суть цього метода полягає у поетапній заміні послідовно або паралельно з'єднаних елементів нелінійного кола еквівалентним нелінійним елементом. Перевагою цього метода є те, що розрахунок здійснюється без складання рівнянь, тільки за рахунок графічної побудови. При цьому вихідними даними є *ВАХ* елементів електричного кола, які представлені у вигляді графіків. Вид характеристики, а також ступінь її складності майже не впливає на хід розрахунків.

#### **5.1.1. Послідовне з'єднання елементів**

Нехай електричне коло (рис. 5.1) складається з двох послідовно з'єднаних нелінійних резисторів  $r_1(I)$  та  $r_2(I)$ . Будуємо у системі координат  $(U, I)$  в однаковому масштабі графіки *ВАХ* цих елементів. Оскільки елементи включені послідовно, струм, що через них протікає буде однаковим



$$I_1 = I_2 = I.$$

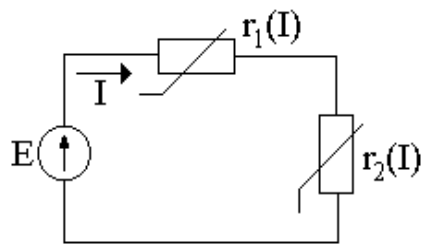


Рис. 5.1

Згідно II-го закону Кірхгофа при послідовному з'єднанні елементів їх напруги додаються

$$U_1 + U_2 = E.$$

Отже для побудови сумарної  $ВАХ$  електричного кола  $r_{\Sigma}(I)$  треба при фіксованих значеннях струму додавати напруги, які визначаються з  $ВАХ$  нелінійних елементів (рис.5.2).

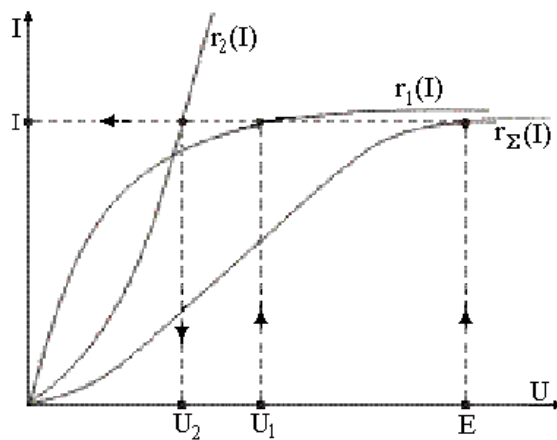


Рис. 5.2

Одержана сумарна  $ВАХ$   $r_{\Sigma}(I)$  є  $ВАХ$  деякого еквівалентного нелінійного резистора (рис. 5.3), який при підключенні до джерела напруги  $E$  забезпечує такий саме закон протікання струму, як послідовно з'єднані нелінійні резистори  $r_1(I)$  та  $r_2(I)$ .

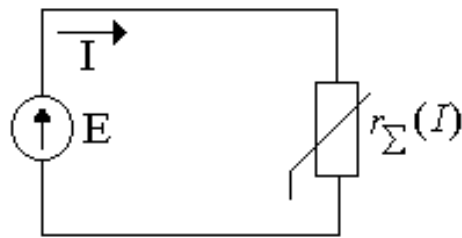


Рис. 5.3

Одержана сумарна  $ВАХ$  дозволяє по заданій напрузі джерела живлення  $E$  визначити струм  $I$ , що протікає в електричному колі, а також падіння напруги на нелінійних елементах. Ці ж графіки дають змогу по відомому струму або напрузі у будь-якому елементі визначити режим роботи усіх інших елементів.

Аналогічно розв'язується задача і в тому випадку, коли послідовно з'єднані три або більше лінійних або нелінійних елементів електричного кола.

### 5.1.2 Паралельне з'єднання елементів

Паралельне з'єднання елементів зображене на рис. 5.4. В одній системі координат в однаковому масштабі будують  $ВАХ$  елементів (рис. 5.5). Очевидно, що при паралельному з'єднанні напруга на обох елементах буде однаковою  $U_1 = U_2 = U = E$ .

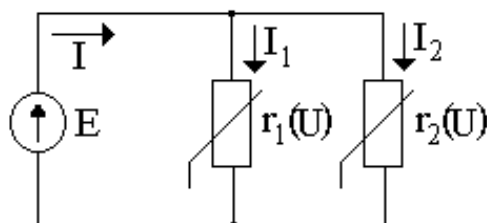


Рис. 5.4

В той же час, згідно I-го закону Кірхгофа струм  $I$ , що споживається від джерела напруги дорівнює сумі струмів, що протікають через нелінійний елементи

$$I = I_1 + I_2.$$

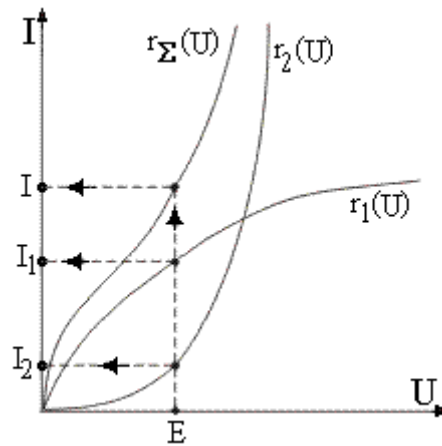


Рис. 5.5

Отже, для побудови сумарної  $BAX$  електричного кола  $r_{\Sigma}(U)$  треба при фіксованих значеннях напруги додавати струми, що визначаються з  $BAX$  HE  $r_1(U)$  та  $r_2(U)$ . Одержана сумарна  $BAX$   $r_{\Sigma}(U)$  є  $BAX$  деякого еквівалентного нелінійного резистора, який при підключенні до джерела напруги  $E$  буде споживати такий самий струм  $I$ , що і паралельно з'єднані резистори  $r_1(U)$  та  $r_2(U)$ .

Одержана сумарна  $BAX$   $r_{\Sigma}(U)$  дозволяє по заданій напрузі джерела живлення  $E$  визначити струм у колі  $I$ , а також струми через нелінійні елементи. За допомогою цих же графіків, знаючи струм або напругу у будь-якому елементі, можна визначити режим роботи усіх інших елементів кола.

Аналогічні побудови здійснюються і в тому випадку, коли один з елементів є лінійним, а також при паралельному з'єднанні трьох і більшого числа елементів.

### 5.1.3. Змішане з'єднання елементів

При змішаному з'єднанні елементів (рис. 5.6), яке складається з послідовного та паралельного з'єднання окремих ділянок електричного кола, для одержання сумарної  $BAX$  кола використовують аналогічні прийоми.

При цьому спочатку будують сумарну ВАХ розгалуженої ділянки, а потім для послідовно з'єднаних ділянок (рис.5.7).

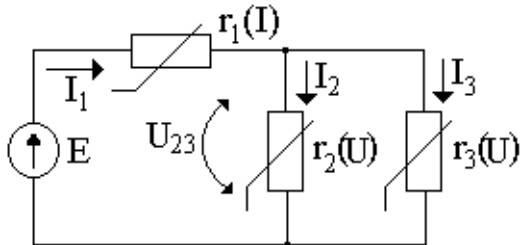


Рис. 5.6

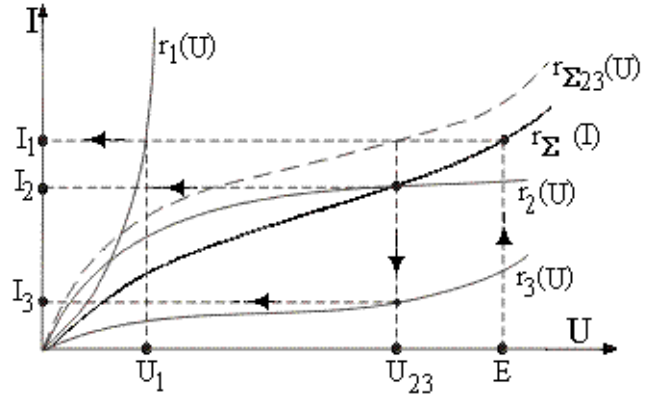


Рис. 5.7

Використовуючи проведену побудову можна визначити режим усіх елементів електричного кола.

Аналогічно ведуть побудову сумарної ВАХ будь-якого, як завгодно складного електричного кола. Однак, при цьому складність побудови зростає, а наочність падає. Здійснивши таку побудову і знаючи режим роботи будь-якого елемента можна визначити режим роботи усіх інших елементів.

Перевагою графічних методів є їх простота та наочність. Недоліками – зростання трудоемності та зменшення точності при ускладненні схеми електричного кола. Графічні методи дають рішення для конкретної схеми електричного кола при конкретних параметрах її елементів. При зміні параметрів будь-якого елемента графічні побудови треба виконувати знову.

## Лекція 6. Метод додавання для немотонних характерхарактеристик

### 6.1 Особливості режиму роботи нелінійних кіл, що містять нелінійні елементи з немонотонною вольт-амперною характеристикою

Якщо електричне коло містить *HE* з немонотонною характеристикою, графічний розрахунок також полягає у побудові сумарної *ВАХ* електричного кола. При цьому можливі два випадки:

- сумарна *ВАХ* електричного кола буде монотонною (рис. 6.1);
- сумарна *ВАХ* – немонотонна (рис. 6.2).

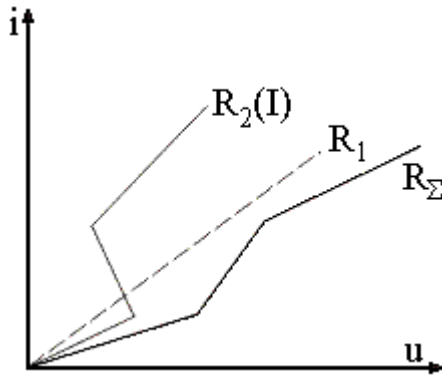


Рис. 6.1

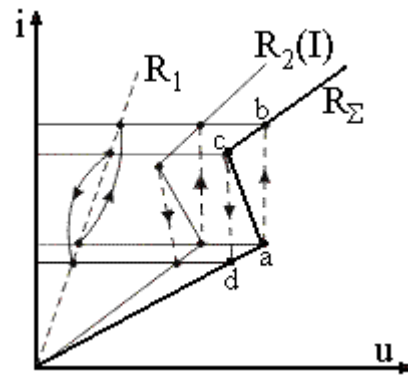


Рис. 6.2

Сумарна *ВАХ* електричного кола (рис. 6.3) буде монотонною у тому випадку, коли модуль негативного диференційного опору *HE*  $R_2$  менший від опору резистора  $R_1$

$$|r_{\partial R_2}| < R_1.$$

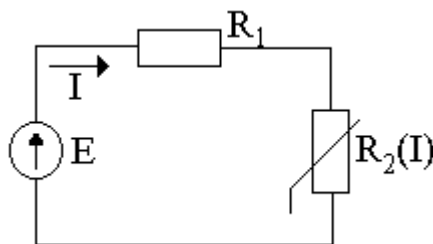


Рис. 6.3

Якщо ж модуль диференційного опору *HE*  $R_2$  (на падаючій ділянці) більший від опору резистора  $R_1$

$$|r_{\partial R_2}| > R_1,$$

сумарна  $ВАХ$  також буде мати ділянку з негативним диференціальним опором

$$\Delta U = \Delta I (R_1 - |r_{\partial R_2}|).$$

Якщо сумарна  $ВАХ$  електричного кола є немонотонною, то при плавному зростанні прикладеної напруги, струм в електричному колі спочатку також змінюється плавно. Коли робоча точка потрапляє в точку  $a$ , при подальшому збільшенні прикладеної напруги робоча точка стрибкоподібно переходить у точку  $b$  і далі переміщується по верхній ділянці характеристики. Якщо після цього почати зменшувати прикладену напругу, робоча точка буде переміщуватись по верхній ділянці характеристики, поки не потрапить у точку  $c$ . При подальшому зменшенні напруги робоча точка стрибкоподібно переходить у точку  $d$  і далі переміщується по нижній ділянці характеристики. Таким чином, переміщення робочої точки по  $ВАХ$  електричного кола аналогічно переміщенню робочої точки по петлі гістерезису. Головна особливість подібних кіл полягає в тому, що у них при плавній зміні прикладеної напруги, можлива стрибкоподібна зміна протікаючого струму.

Якщо  $|r_{\partial R_2}| > R_1$ , падаюча ділянка  $ВАХ$   $HE$  (ділянка з негативним диференціальним опором) є нестійкою і робоча точка не може перебувати на ній.

У момент стрибкоподібної зміни струму статичний та диференціальний опір  $HE$  дискретно змінюється.

## **6.2. Вольт-амперні характеристики ділянок електричного кола, які містять нелінійний елемент та джерело напруги або струму**

У деяких випадках нелінійний ланцюг може мати в окремих гілках джерела напруги та струму. Для того, щоб розглянуті графічні методи можна було застосовувати і в цьому випадку, треба вміти будувати  $ВАХ$  ділянок електричного кола, які містять джерела енергії.

Нехай є гілка, яка містить послідовно з'єднані  $HE$   $R(I)$  та джерело напруги  $E$  (рис. 6.4). Згідно II-у закону Кірхгофа

$$U_{12} = U_R(I) + E. \quad (6.1)$$

Ідеальне джерело напруги – це двополіусник, напруга на зовнішніх виводах якого не залежить від величини та напрямку протікаючого струму. Його  $BAH$  – це пряма лінія, що проходить через точку  $u = E$  паралельно до осі струмів. Оскільки гілка, що розглядається, являє собою послідовне з'єднання елементів, її сумарну  $BAH$   $U_{12}(I)$  одержуємо за рахунок додавання напруг двох  $BAH$  при фіксованих значеннях струму, згідно рівняння 6.1 (рис. 6.5).

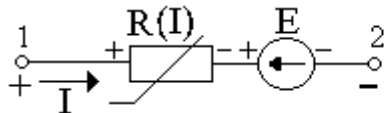


Рис. 6.4

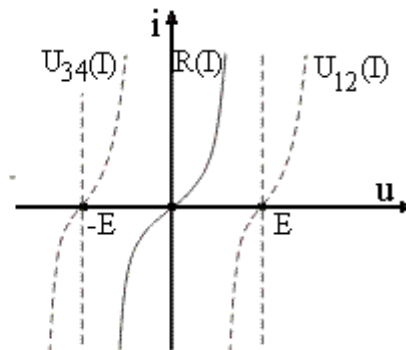


Рис. 6.5

Якщо джерело напруги включити у протилежному напрямі (рис.6.6) баланс напруг буде мати такий вигляд

$$U_{34} = U_R(I) - E. \quad (6.2)$$

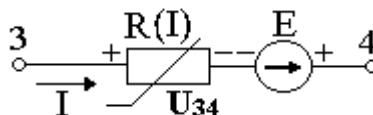


Рис. 6.6

При цьому сумарну  $BAH$  одержуємо шляхом віднімання напруг двох  $BAH$  при фіксованих значеннях струму. В результаті одержуємо сумарну  $BAH$  гілки  $U_{34} = F(I)$  (рис. 6.5).

Таким чином, якщо гілка електричного кола містить джерело напруги, сумарна  $ВАХ$  зміщується вправо або вліво на величину  $E$  залежно від полярності включення джерела напруги.

Якщо паралельно  $НЕ$  підключити джерело струму  $\mathfrak{I}$  (рис.6.7), то згідно I-у закону Кірхгофа, залежно від полярності підключення  $\mathfrak{I}$

$$I(U) = I_1(U) \pm \mathfrak{I}.$$

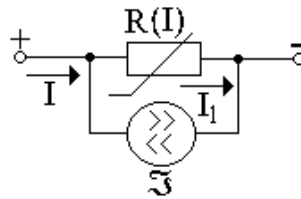


Рис.6.7

Оскільки  $ВАХ$  ідеального джерела струму – це пряма лінія, що проходить через точку  $i = \mathfrak{I}$  паралельно до осі напруг, сумарну  $ВАХ$  одержуємо шляхом зміщення характеристики  $НЕ$  вверх або вниз на величину  $\mathfrak{I}$  залежно від полярності підключення джерела струму (рис. 6.8).

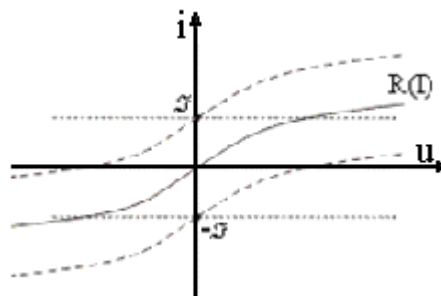


Рис. 6.8.

Аналіз одержаних характеристик показує, що розглянуті гілки електричного кола є активними двополюсниками, оскільки їх сумарна  $ВАХ$  не проходить через початок координат. Фізичний смисл цього полягає в тому, що у таких двополюсниках при зовнішній напрузі  $U = 0$  (при закороченні



зовнішніх виводів в електричному колі буде протікати струм, обумовлений внутрішнім джерелом енергії).

Використовуючи  $ВАХ$  активних гілок можна побудувати  $ВАХ$  розгалуженого електричного кола, який містить лінійні та нелінійні елементи і джерела напруги або струму, і визначити режим роботи усіх елементів, як це було розглянуто вище.

### **Лекція 7. Метод пересікання та його застосування**

Нехай маємо електричне коло (рис. 7.1), яке складається з послідовно з'єднаних лінійного та нелінійного резисторів.  $ВАХ$  нелінійного резистора  $R_2(I)$  задана.

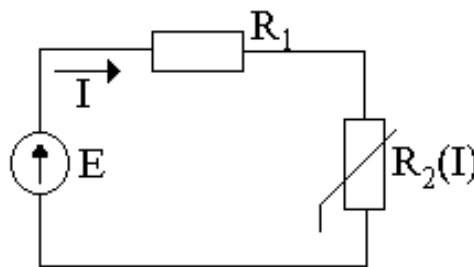


Рис. 7.1

Оскільки струм в усіх елементах однаковий, згідно II-у закону Кірхгофа напругу на  $HE$  можна визначити як

$$U_2(I) = E - U_1(I) = E - IR_1. \quad (7.1)$$

Функція  $U_2(I)$  – це залежність напруги на  $HE$  від протікаючого струму  $U_2 = f(I)$  і графіком цієї залежності є  $ВАХ$  нелінійного елемента.

Якщо у цій же системі координат побудувати графік залежності

$$U = E - IR_1, \quad (7.2)$$

то точка перетину цих двох графіків і буде рішенням рівняння (7.1). Оскільки функція (7.2) є лінійною, її графік буде являти собою пряму лінію, яку можна побудувати по двом точкам:

при  $I = 0$ ;  $U = E$ ; при  $U = 0$ ;  $I = E/R_1$ .

Відклавши ці точки на відповідних осях і з'єднавши їх прямою лінією одержимо графік функції (7.2) (рис. 7.2), який часто називають “лінією навантаження”. Точка перетину цього графіка з графіком  $BAХ HE$  (точка 0) є рішенням вихідного рівняння (7.1). Вона визначає режим роботи елементів заданого кола (струм  $I$  та напруги  $U_1$  та  $U_2$ ) при заданій прикладеній напрузі  $E$ . Якщо параметри елементів будуть змінюватися, зміниться і режим роботи електричного кола, і для його розрахунку треба знову будувати відповідні графіки.

Таким чином, метод пересікання дає рішення для одного конкретного режиму роботи електричного кола. У цьому плані він поступається методу додавання вольт-амперних характеристик, який дає рішення для будь-якого значення прикладеної напруги  $E$ .

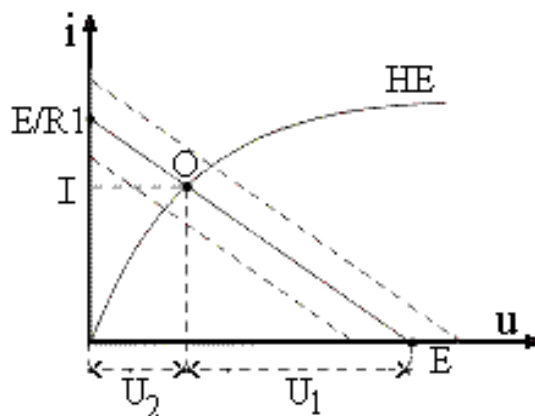


Рис. 7.2

Переваги метода пересікання проявляються у тому випадку, коли  $HE$  є керованим (параметричним). У цьому разі точки пересікання лінії навантаження з графіками сімейства  $BAХ HE$  будуть визначати режим роботи електричного кола при відповідних значеннях керуючого фактора.

Наприклад, якщо як  $HE$  використовується транзистор, то побудувавши в одній системі координат сімейство його вихідних характеристик та лінію

навантаження, одержимо точки пересікання  $O_1, O_2, \dots$ , які будуть визначати режим роботи кола при різних значеннях керуючого фактора (базового струму  $I_b$ ) (рис. 7.3). Якби для аналізу такого кола використовувався метод додавання  $ВАХ$ , то для кожного значення керуючого фактора  $I_b$  треба було б здійснювати нову графічну побудову.

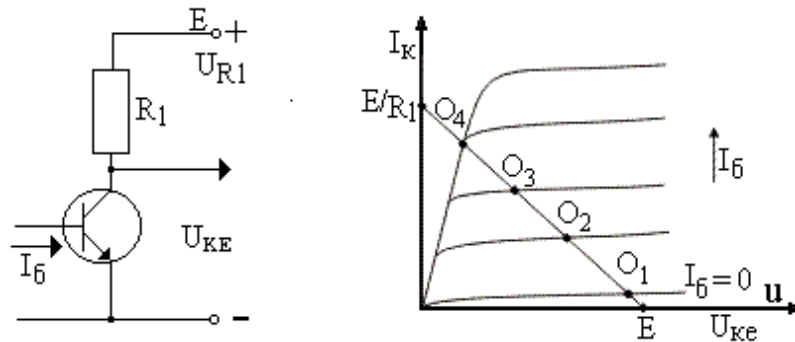


Рис. 7.3

### 7.1. Визначення робочої точки нелінійного елемента електричного кола

Однією з головних цілей аналізу нелінійних резистивних кіл сталого струму є визначення робочої точки або точки зміщення електронних або напівпровідникових приладів. Точку зміщення визначають при дії на електричний ланцюг тільки джерела сталої напруги або струму. При цьому індуктивні елементи кола закорочуються, а ємнісні – розриваються. Робоча точка, або точка зміщення визначається значенням сталої струму та напруги на  $HE$  і зображується як точка на його  $ВАХ$ . Зміщуючи робочу точку ми тим самим переходимо на іншу ділянку  $ВАХ HE$ . Робочу точку електронних та напівпровідникових приладів вибирають таким чином, щоб забезпечити роботу приладу на бажаній ділянці  $ВАХ$  (лінійна ділянка, ділянка з заданим диференціальним опором і т. ін.).

Найзручніше робочу точку визначати за допомогою метода пересікання.

Якщо  $BAX_{HE}$  є монотонною, то для будь-якого режиму роботи буде існувати тільки одна робоча точка (рис. 7.4).

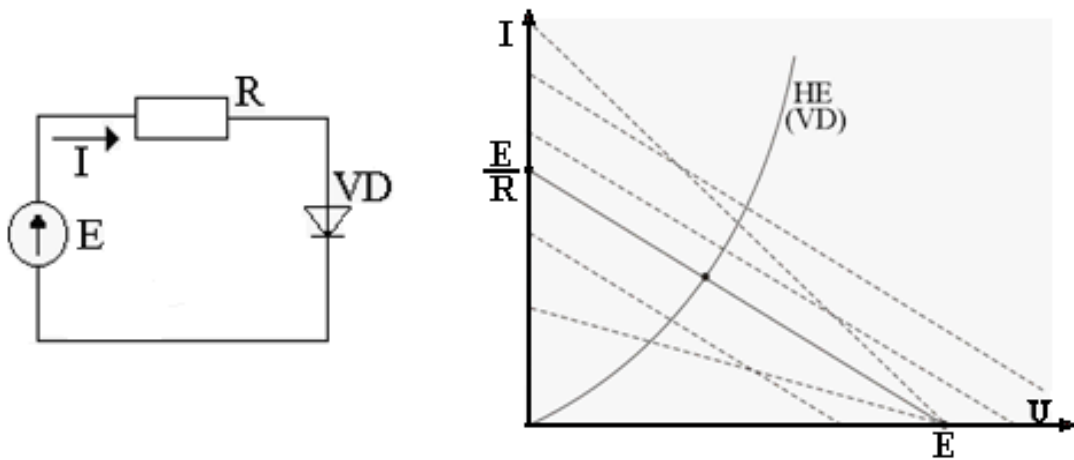


Рис. 7.4

Якщо ж  $BAX_{HE}$  є немонотонною, то в окремих режимах можливі декілька точок пересікання (рис. 7.5).

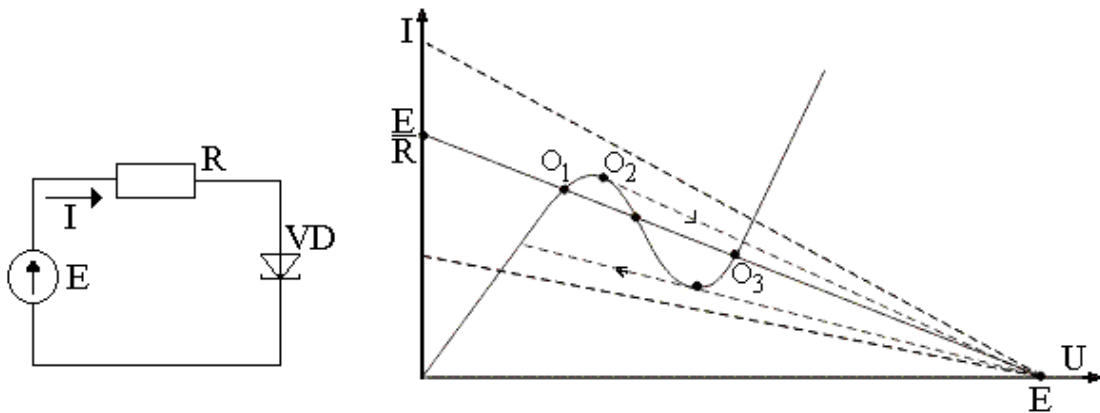


Рис. 7.5.

При зміні параметрів елементів електричного кола  $E$  та  $R$  буде змінюватися положення лінії навантаження та її нахил. Внаслідок цього можлива стрибкоподібна зміна напруги та струму через  $HE$ . При цьому деякі робочі точки є нестійкими. Оскільки  $BAX_{HE}$  найчастіше задається у вигляді графіків, робочу точку (точку зміщення) найчастіше визначають графічно.

## 7.2. Розрахунок складного електричного кола, який містить лише один нелінійний елемент

Відомо, що будь-який, як завгодно складний електричний ланцюг, який містить джерело енергії та резистивні елементи, шляхом послідовних перетворень можна привести до найпростішого електричного кола, яке складається з джерела еквівалентної ЕРС  $E_e$  та еквівалентного опору  $R_e$  (рис. 7.6). Для лінійного кола такі перетворення легко здійснювати аналітично. Якщо електричний ланцюг містить нелінійні елементи, це можна зробити графічно.

Нехай є складний електричний ланцюг, який містить лише один НЕ  $R(I)$  (рис. 7.7). Виділимо цей НЕ, а інші елементи кола зобразимо у вигляді еквівалентного двополюсника  $A$ . Оскільки цей двополюсник містить тільки лінійні елементи та джерела енергії, він є активним ланцюгом. По відношенню до виділеної нелінійної гілки 1 - 2, лінійна частина кола може бути замінена еквівалентним генератором  $E_e$  та його внутрішнім опором  $r_i$  (рис. 7.8).

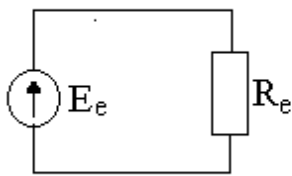


Рис. 7.6.

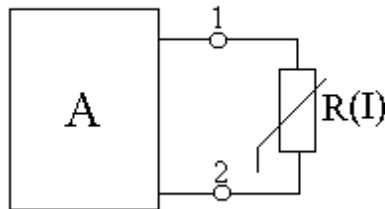


Рис. 7.7.

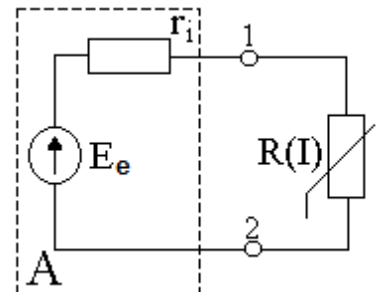


Рис. 7.8.

Напруга еквівалентного генератора  $E_e$  дорівнює напрузі між точками 1-2 при відключеному опорі  $R(I)$ . Внутрішній опір генератора  $r_i$  дорівнює опору між точками 1 - 2 при відключеному опорі  $R(I)$ , замкнених джерелах ЕРС та розірваних джерелах струму у лінійній частині кола.

Параметри  $E_e$  та  $r_i$  можна розрахувати аналітично, за допомогою відомих методів розрахунку лінійних кіл або визначити експериментально (метод двох

вимірювань). Визначивши параметри еквівалентного генератора, режим роботи нелінійного елемента можна визначити графічно методом пересікання (рис. 7.9).

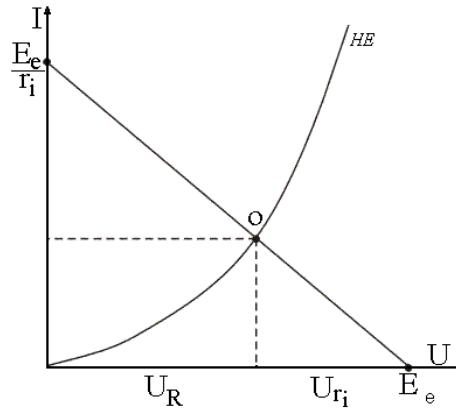


Рис. 7.9

Робоча точка *HE* визначається точкою пересікання *ВАН HE* з лінією навантаження генератора, яка описується рівнянням

$$U = E_e - I r_i.$$

## **Лекція 8. Застосування еквівалентних схем при розрахунку нелінійних кіл**

### **8.1. Розрахунок нелінійного кола при малій зміні струмів та напруг (метод лінеаризації характеристик)**

Якщо відомо, що в процесі роботи нелінійного кола струм та напруга в *HE* будуть змінюватися на незначну величину відносно початкової робочої точки *A*, можна вважати, що переміщення робочої точки відбувається практично на лінійній ділянці характеристики. У цьому разі при розрахунках характеристику *HE* на робочій ділянці можна замінити дотичною до робочої точки *A*. На рис. 8.1 наведено *ВАН HE*, опір якого зменшується при збільшенні

прикладеної напруги. Якщо продовжити дотичну до її пересікання з віссю напруг, у точці пересікання одержимо значення деякої уявної ЕРС  $E_o$ .

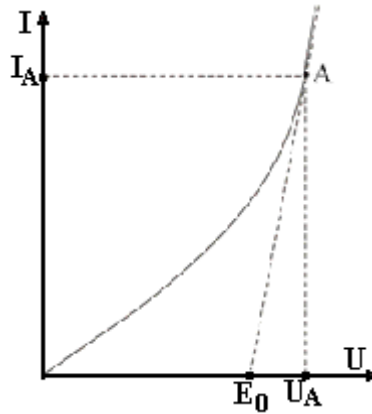


Рис. 8.1

Відповідно до графіка диференційний опір  $HE$  в робочій точці  $A$  можна визначити з виразу

$$r_{\partial} = \frac{du}{di} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_A - E_o}{I_A}.$$

Очевидно, що напругу на  $HE$  в околиці робочої точки  $A$  можна приблизно описати виразом

$$U \cong I r_{\partial} + E_o. \quad (8.1)$$

Для будь-якого кола можна записати аналітичний вираз, який описує взаємозв'язок струмів та напруг. Відповідно, будь-якому аналітичному виразу, який встановлює взаємозв'язок струму та напруги, може бути поставлено у відповідність деяке електричне коло.

З урахуванням (8.1),  $HE$  на робочій ділянці характеристики в околиці робочої точки  $A$ , при розрахунках можна замінити еквівалентною схемою (рис. 8.2).

Відповідно до еквівалентної схеми, струм в електричному колі можна визначити з виразу

$$I \cong \frac{U - E_o}{r_o}. \quad (8.2)$$

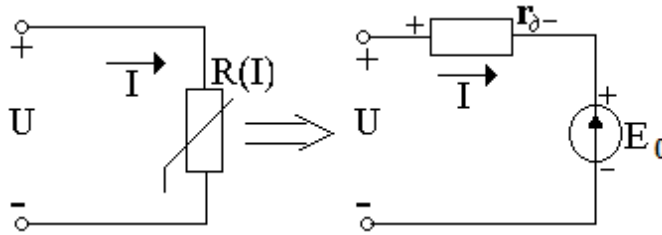


Рис. 8.2

Таким чином, у режимі малих сигналів *HE* при розрахунках можна замінити еквівалентним лінійним ланцюгом.

Якщо опір *HE* зростає при збільшенні напруги (характеристика випукла), дотична до точки *A* пересікається з віссю напруг при  $U < 0$  (рис. 8.3).

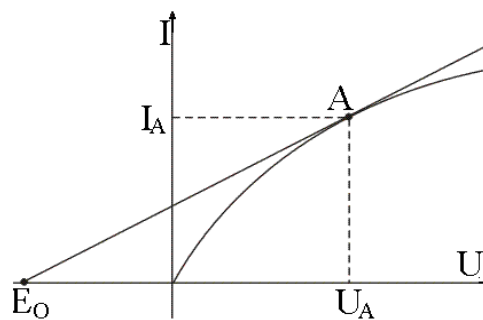


Рис. 8.3

У цьому разі напруга уявного джерела *EPC*  $E_o$  буде негативною. Згідно графіка диференційний опір в робочій точці *A* можна визначити з такого виразу

$$r_o = \frac{U_A + |E_o|}{I_A}.$$

Отже, напругу на *HE* в околиці робочої точки *A* можна приблизно описати таким виразом

$$U \cong I r_o - |E_o|. \quad (8.3)$$

Еквівалентна схема *HE* на робочій ділянці буде такою, як на рис. 8.4.



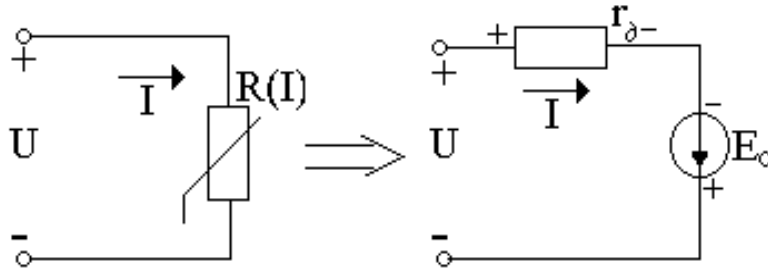


Рис. 8.4.

Відповідно до схеми струм в колі можна визначити з виразу

$$I \cong \frac{U + |E_o|}{r_d}. \quad (8.4)$$

Цей вираз та еквівалентна схема можуть використовуватися для приблизних аналітичних розрахунків кола з *HE* поблизу робочої точки *A*.

Якщо диференційний опір *HE* в робочій точці дуже великий, дотична до робочої точки буде пересікатися з віссю напруг при  $u \ll 0$ . У цьому випадку доцільно шукати точку пересікання дотичної з віссю струмів, а в еквівалентну схему вводити фіктивне джерело струму  $\mathfrak{I}_o$ .

Диференційний опір *HE* в робочій точці *A*

$$r_d = \frac{du}{di} = \frac{\Delta U}{\Delta I} = \frac{U_A}{I_A - \mathfrak{I}_o}.$$

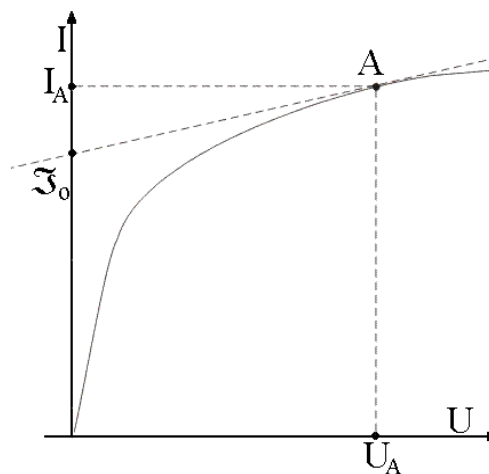


Рис. 8.5.

Напругу в околиці робочої точки  $A$  можна приблизно визначити з виразу

$$U \cong (I - \mathfrak{I}_o) r_\partial,$$

а струм  $I = \frac{U}{r_\partial} + \mathfrak{I}_o$ .

Останньому виразу відповідає лінійний ланцюг, зображений на рис. 8.6.

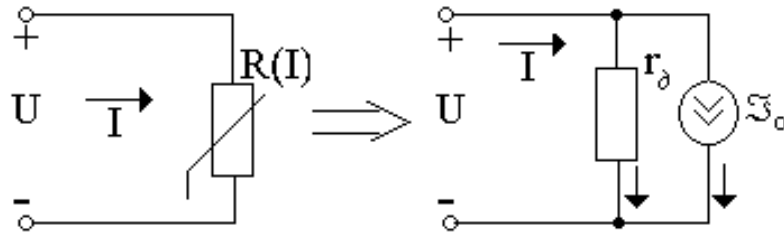


Рис. 8.6

У загальному випадку лінеаризовану схему заміщення  $HE$  в околиці робочої точки можна побудувати, як на основі джерела  $EPC$ , так і джерела струму.

Введемо параметр відносний диференційний опір  $HE$  в робочій точці  $A$

$$r_{\partial A}^* = \frac{r_{\partial A}}{r_{cm_A}}.$$

З урахуванням цього параметра можна дати такі рекомендації.

Якщо:

$r_{\partial A}^* \ll 1 (r_\partial \ll r_{cm})$  - в еквівалентній схемі доцільно застосовувати джерело

напруги  $E_o$ ;

$r_{\partial A}^* \gg 1 (r_\partial \gg r_{cm})$  - в еквівалентній схемі доцільно застосовувати джерело

струму  $\mathfrak{I}_o$ .

$r_{\partial A}^* > 1 (r_\partial > r_{cm})$  - в еквівалентній схемі доцільно застосовувати джерело

струму  $\mathfrak{I}_o$  або джерело напруги  $-|E_o|$  (рис.8.7, рис.8.9 а, б).

$r_{\partial_A}^* < 1 (r_{\partial} < r_{cm})$  - в еквівалентній схемі доцільно застосовувати джерело напруги  $+E_0$  або джерело струму  $-|\mathfrak{I}_0|$  (рис.8.8, рис.8.9 в, г).

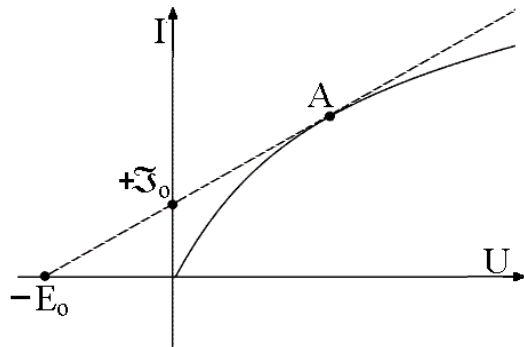


Рис. 8.7

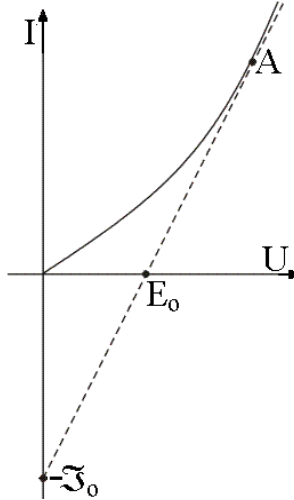


Рис. 8.8

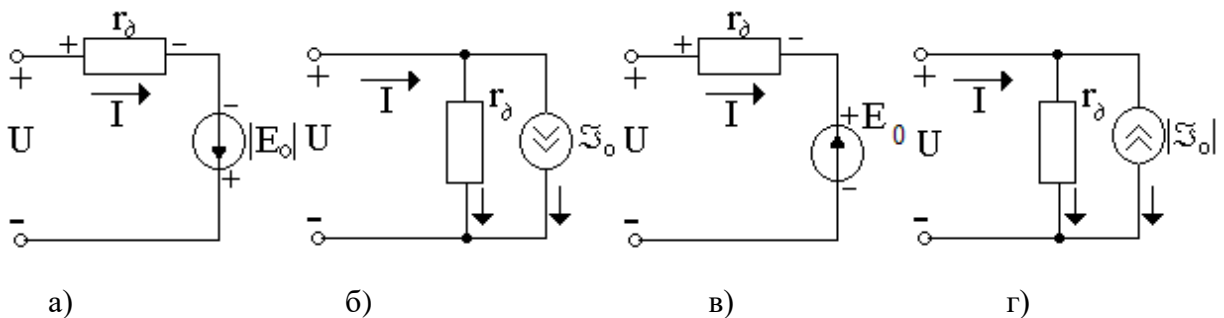


Рис. 8.9.

## 8.2. Схема заміщення ділянки вольт-амперної характеристики з негативним диференціальним опором

На ділянці з негативним диференціальним опором при збільшенні прикладеної напруги відбувається зменшення струму, що протікає через елемент.

Відповідно до графіка диференціальний опір в робочій точці можна визначити з виразу

$$r_{\partial} = \frac{E_o - U_A}{I_A} \text{ або } \frac{U_A}{\mathfrak{I}_o - I_A}.$$

При цьому напруга на  $HE$  в околиці робочої точки  $A$  може бути описана виразом

$$U \cong E_o - Ir_{\partial}; U \cong (\mathfrak{I}_o - I)r_{\partial}$$

Струм в околиці робочої точки  $I \approx \frac{E_o - U}{r_{\partial}}; I = \mathfrak{I}_o - \frac{U}{r_{\partial}}.$

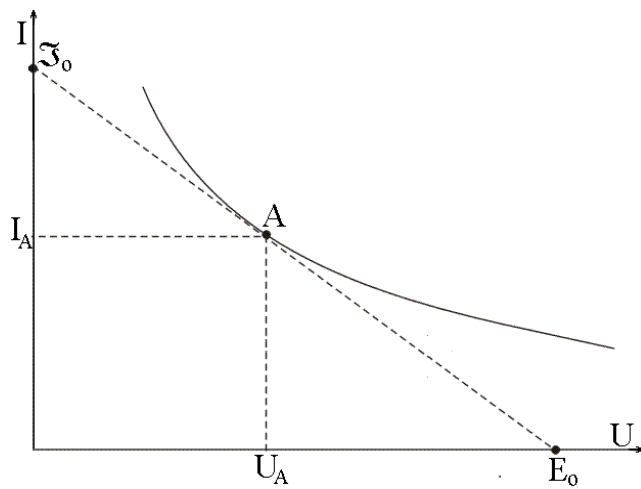


Рис. 8.10

З еквівалентних схем (рис 8.11) випливає, що напрям струму електричного кола визначається фіктивним джерелом енергії  $E_o$  або  $\mathfrak{I}_o$ .

У цьому випадку при зростанні прикладеної зовнішньої напруги  $U$ , відбувається зменшення струму  $I$ . За рахунок цього створюється ефект негативного диференційного опору.

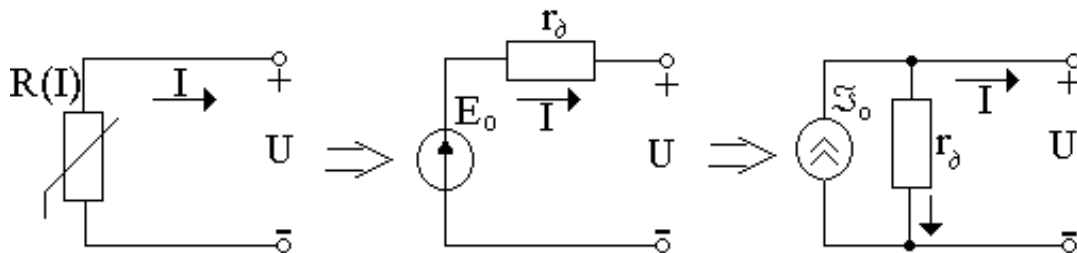


Рис. 8.11

**Лекція 9. Розрахунок нелінійних кіл сталого струму аналітичними методами**

Графічні методи розрахунку за своєю суттю є досить простими та наочними. Проте при розрахунках складних кіл вони є досить трудомісткими. Крім того, графічні методи, як правило, дають рішення для конкретних значень вихідних даних. В той же час аналітичні методи дають рішення поставленої задачі у загальному вигляді.

Підставивши у аналітичний вираз конкретні значення вихідних даних можна розрахувати роботу кола у різних режимах.

**9.1. Апроксимація вольтамперних характеристик нелінійних елементів**

Для того, щоб скористатися аналітичними методами розрахунку,  $VAX_{HE}$  треба описати аналітичним виразом. Проте  $VAX$  більшості реальних  $HE$  є досить складними і їх не завжди вдається описати досить простим аналітичним виразом. В той же час у більшості випадків графік  $VAX_{HE}$  відомий (з довідника або знятий експериментально). Тому однією з перших задач, що виникають при аналітичних розрахунках нелінійного кола є апроксимація – приблизне аналітичне описання  $VAX_{HE}$ .

Найчастіше застосовуються такі види апроксимації:

- 1) поліноміальна;
- 2) за допомогою трансцендентних функцій;
- 3) кусочно-лінійна.

Зручність розрахунку конкретного кола суттєво залежить від вдалого вибору аналітичного виразу для апроксимації  $VAX_{HE}$ . Найчастіше повністю  $VAX_{HE}$  не вдається описати якимось одним аналітичним виразом. Тому, в

першу чергу, треба оцінити ту ділянку  $ВАХ$ , на якій буде відбуватися переміщення робочої точки, і проводити апроксимацію саме цієї ділянки.

Треба пам'ятати, що характеристики реальних елементів найчастіше знімають експериментально. У довідниках наводять типові характеристики елементів. Тому нема сенсу одержувати точність наближення функцій апроксимації вищою, ніж точність самої характеристики з урахуванням можливих відхилень її параметрів.

Спосіб апроксимації вибирають в кожному конкретному випадку з урахуванням характеристики реального елемента, положення його робочої точки, а також мети дослідження.

Подібні аналітичні методи розрахунку, для здійснення яких використовується графік  $ВАХ НЕ$ , називають графоаналітичними методами.

### **9.1.1. Поліноміальна апроксимація**

При поліноміальній апроксимації  $ВАХ НЕ$  або якусь її ділянку описують алгебраїчним поліномом  $n$ -го ступеня

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n = \sum_{k=0}^n a_k u^k.$$

Цей поліном має  $n + 1$  коефіцієнтів, які треба визначити з урахуванням заданої точності наближення. У математиці відомі різні методи знаходження коефіцієнтів полінома. В теорії кіл широке застосування має інтерполяція, при якій ці коефіцієнти визначають з умови співпадання полінома апроксимації та  $ВАХ НЕ$  в певних наперед вибраних точках (метод вибраних точок). Кількість вибраних точок буде визначати максимальний ступінь полінома  $n$ .

#### **Приклад.**

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + a_3 u^3; \quad (9.1)$$

У рівняння 9.1 по чергово підставляють координати вибраних точок (рис. 9.1).

$$\begin{cases} i_1 = a_0 + a_1 u_1 + a_2 u_1^2 + a_3 u_1^3; \\ i_2 = a_0 + a_1 u_2 + a_2 u_2^2 + a_3 u_2^3; \\ i_3 = a_0 + a_1 u_3 + a_2 u_3^2 + a_3 u_3^3; \end{cases}$$

$$a_0 = i_0 \text{ при } u = 0.$$

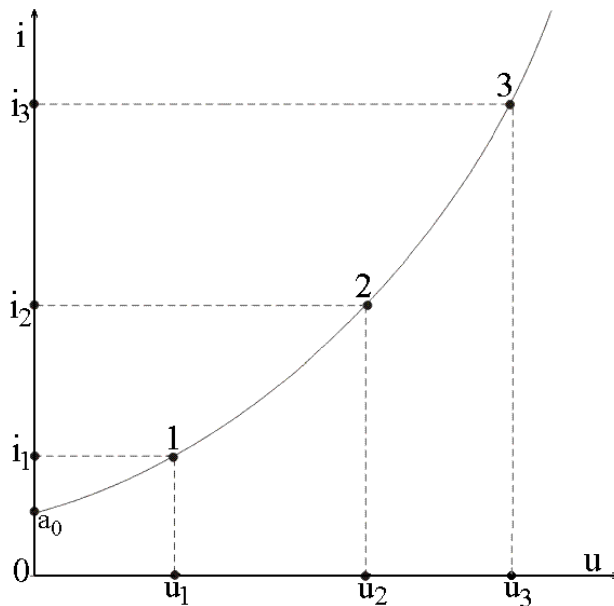


Рис. 9.1

Розв'язавши одержану систему рівнянь, визначимо коефіцієнти апроксимації  $a_k$ .

При аналітичних розрахунках найчастіше застосовується апроксимація *ВАХ НЕ* поліномам другого або третього ступеня. У цьому разі розрахунок кола зводиться до розв'язання квадратного або кубічного рівняння.

### 9.1.2. Апроксимація трансцендентними функціями

У цьому випадку для апроксимації *ВАХ НЕ* застосовують експоненти, суми експонент, гіперболічні, тригонометричні та інші функції.

Наприклад, *ВАХ* напівпровідникового діода часто апроксимують таким виразом

$$i = I_o (e^{\alpha u} - 1),$$

де  $I_o$  – струм неосновних носіїв (струм насичення  $p$ - $n$  переходу при зворотній напрузі).

Зокрема, такий вираз одержуємо при кількісному аналізі фізичних процесів у  $p$ - $n$  переході (рис. 9.2).

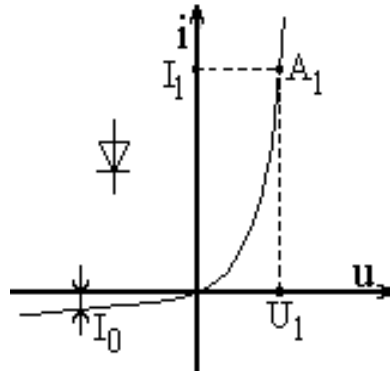


Рис. 9.2.

Коефіцієнт  $\alpha$  можна визначити різними способами. Наприклад, вибравши на  $ВАХ$  діода робочу точку  $A_1$  та визначивши відповідний струм  $i_1$  та напругу  $u_1$ , розв'язати рівняння

$$i_1 = I_o(e^{\alpha u_1} - 1) \quad (9.2)$$

відносно параметра  $\alpha$ .

Очевидно, що розрахунок нелінійного кола, при апроксимації  $ВАХ$  НЕ трансцендентними функціями, зводиться до розв'язання трансцендентного рівняння.

### 9.1.3. Кусочно-лінійна апроксимація

Якщо перші два види апроксимації доцільно застосовувати у тих випадках, коли робоча точка переміщується на обмеженій ділянці  $ВАХ$  НЕ (режим невеликого сигналу), то кусочно-лінійну апроксимацію частіше застосовують у режимі великого сигналу, коли задіяна уся  $ВАХ$  НЕ або її значна частина.



Кусочно-лінійна апроксимація полягає у заміні реальної залежності  $i = f(u)$ , що плавно змінюється, приблизною, яка складається з відрізків прямих ліній, які найчастіше є дотичними до реальної  $ВАХ$  у деяких точках (рис. 9.3).

На різних ділянках така ламана  $ВАХ$  описується різними лінійними аналітичними виразами.

$$i = \begin{cases} -|I_1|; & \text{при } u \leq U_1; \\ -\frac{u}{r_2}; & \text{при } U_1 \leq u \leq U_2; \\ 0; & \text{при } U_2 \leq u \leq U_3 \\ \frac{u - U_3}{r_3}; & \text{при } u \geq U_3. \end{cases} \quad (9.3)$$

де  $r_2$  та  $r_3$  – диференційні опори, які визначаються у точках дотику відповідних лінійних ділянок до  $ВАХ$  реального  $НЕ$ .

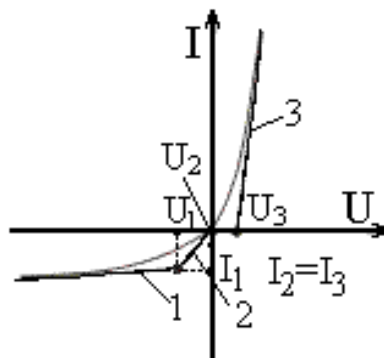


Рис. 9.3.

При аналітичних розрахунках кола, що містить даний  $НЕ$  треба у процесі розрахунків контролювати одержувані значення напруги та струму в  $НЕ$  та у відповідності з умовами (9.3) використовувати відповідний аналітичний вираз для описання  $НЕ$ .

## Лекція 10. Дискретно-лінійні схема заміщення НЕ

Як уже зазначалося, кожному аналітичному виразу, що пов'язує струм та напругу, можна поставити у відповідність ділянку електричного кола, побудованого на ідеалізованих елементах. Так кожному аналітичному виразу у системі (9.3) відповідає деяка лінійна гілка електричного кола. Тому при розрахунках таких кіл *НЕ* можна замінити сукупністю лінійних гілок, причому при зміні прикладеної напруги  $u$ , *НЕ* у відповідності до умов (9.3) заміщується відповідною лінійною гілкою (рис. 10.1).

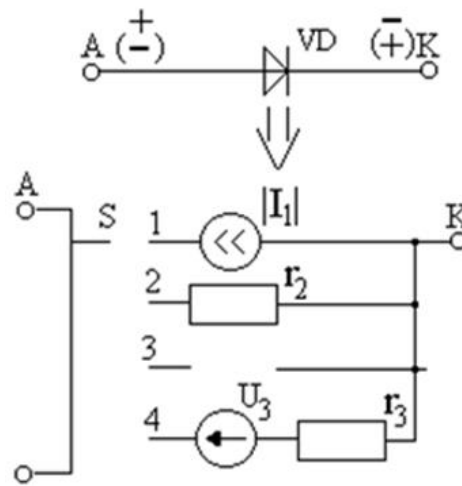


Рис. 10.1

Схема рис. 10.1 називається дискретно-лінійною схемою заміщення НЕ.

У загальному випадку довільній ділянці характеристики на площині  $U, I$  по відомим координатам початкової або кінцевої точки можна поставити у відповідність лінійну гілку електричного кола, яка у загальному випадку складається з резистивного елемента, а також ідеального джерела напруги та (або) струму (рис. 10.2).

Найбільш загальним є випадок г). Усі інші можна одержати з нього, якщо прирівняти  $U_1$  або  $I_1$  до нуля. Опір  $r$  дорівнює диференційному опору лінійної ділянки  $r = \Delta U / \Delta I$ .

Якщо лінійна ділянка характеристики розташована у II, III або IV квадрантах системи координат, загальний вигляд еквівалентної схеми не змінюється, проте треба відповідно змінити полярність підключення джерел енергії.

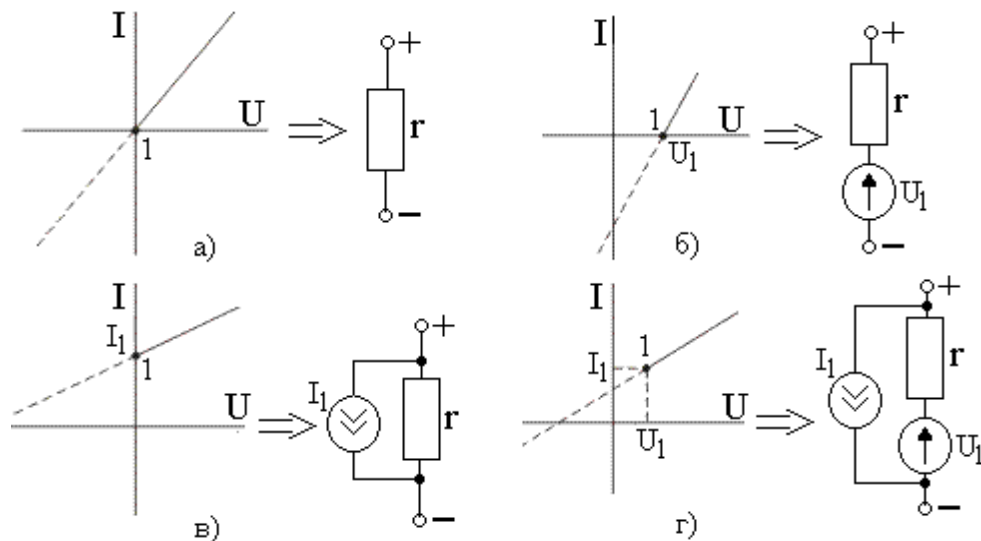


Рис. 10.2.

Якщо еквівалентну схему доповнити ідеальним вентилем, можна моделювати лінійні ділянки характеристики з точкою перелому (рис. 10.3).

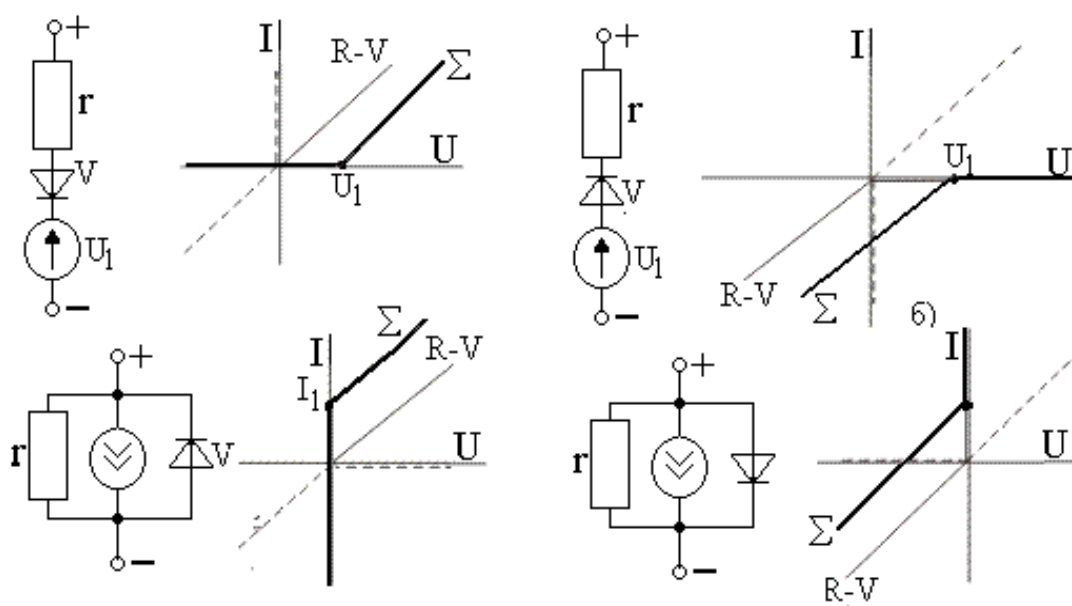


Рис. 10.3.

Комбінуючи послідовне або паралельне з'єднання розглянутих найпростіших гілок можна моделювати кусочно-лінійну апроксимацію будь-якої, як завгодно складної реальної характеристики  $HE$ .

### 10.1 Приклад аналітичного розрахунку нелінійного кола

Дано електричне коло (рис. 10.4), де  $R = 10 \text{ Ом}$ ;  $E = 18 \text{ В}$ . ВАР нелінійного резистора при позитивних значеннях струму та напруги  $I \geq 0$  та  $U \geq 0$  апроксимується залежністю (поліноміальна апроксимація)

$$U(I) = aI + bI^2.$$

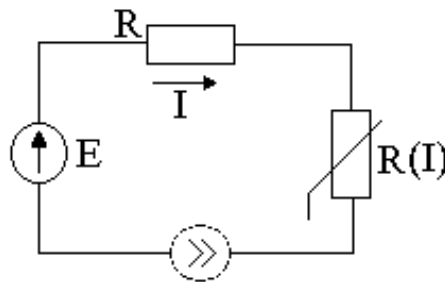


Рис. 10.4.

Розрахувати струм в нелінійному електричному колі аналітичним методом, якщо  $a = 6 \text{ В/А}$ ;  $b = 2 \text{ В/А}^2$ .

**Розв'язок.** Згідно II –у закону Кірхгофа

$$E = IR + U(I).$$

Підставимо в рівняння залежність  $U(I)$

$$E = IR + aI + bI^2 = (R+a)I + bI^2;$$

Таким чином, струм знаходимо, розв'язавши квадратне рівняння

$$2 I^2 + 16 I - 18 = 0 \text{ або } I^2 + 8I - 9 = 0;$$

Отже, струм  $I$  дорівнює

$$I = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q} = -4 \pm \sqrt{16 + 9};$$

$$I_1 = 1\text{ A} ; I_2 = - 9\text{ A}.$$

Розв'язок  $I_2 = - 9\text{ A}$  не відповідає умовам задачі, а отже не має фізичного смислу.

Проте, якби не було вихідних обмежень ( $I \geq 0$  та  $U \geq 0$ ), то при наявності в електричному колі ідеального джерела струму  $I = - 9\text{ A}$  у відповідності з II законом Кірхгофа електричне коло також перебувало б у стані рівноваги.

## **10.2. Чисельні методи розрахунку**

Якщо процеси в електричному ланцюзі описуються алгебраїчними рівняннями високого порядку ( $n \geq 3$ ) або неалгебраїчними (трансцендентними) рівняннями, одержати аналітичний вираз для знаходження коренів рівняння практично не вдається. У цьому разі доцільно застосовувати універсальні обчислювальні алгоритми – чисельні методи розв'язання рівнянь. При цьому методі, застосувавши рівняння елементів електричного кола, а також закони Кірхгофа, складають повну систему рівнянь кола, а потім шукають її розв'язок, застосовуючи чисельні методи.

Перевагою чисельних методів є те, що розрахунок ведеться за однією формулою, а результати розрахунку на попередньому етапі є вихідними даними для наступного етапу. Такий рекурентний циклічний процес особливо зручний при розрахунках на комп'ютері. Застосування чисельних методів дає можливість розрахувати режим роботи конкретних лінійних та нелінійних кіл практично будь-якої складності з будь-якою необхідною точністю. При цьому методи розрахунку лінійних та нелінійних задач відрізняються значно менше, ніж при аналітичних розрахунках.

У зв'язку із цим при розгляді процесів у нелінійних колах перевагу треба віддати простоті та наочності метода розрахунку, а також можливості оцінки явища без його точного кількісного аналізу, який в разі необхідності завжди можна провести на комп'ютері.

## РОЗДІЛ III. НЕЛІНІЙНІ КОЛА ПРИ ПЕРІОДИЧНИХ ДІЯХ

### Лекція 11. Розрахунок нелінійних кіл змінного струму

#### 11.1 Статичні та динамічні характеристики НЕ

Нелінійні кола сталого струму дозволяють реалізувати ряд пристроїв, які не можуть бути побудовані на базі лінійних елементів електричного кола (наприклад, параметричні стабілізатори напруги та струму, мостові схеми порівняння).

Більшість електричних та електронних пристроїв працює на змінному струмі, або при періодичних зовнішніх діях. На змінному струмі особливі властивості нелінійних кіл є ще більш різноманітними, оскільки

- процеси в нелінійних колах на змінному струмі суттєво ускладнюються;
- у колах змінного струму крім нелінійних резистивних елементів застосовують також нелінійні індуктивності та ємності.

При розрахунку нелінійних кіл сталого струму досить мати статичні характеристики нелінійних елементів, тобто характеристики, які знімають при сталих струмах та напругах.

При змінних струмах статичні характеристики не завжди дають повну інформацію про поведінку нелінійного елемента в електричному колі. Зокрема, в інерційних елементах вид  $ВАХ$  буде залежати від швидкості зміни діючого параметра. Тому подібні елементи характеризують також динамічними характеристиками, які визначають залежність між миттєвими значеннями струму та напруги при змінному струмі. Динамічна характеристика може суттєво відрізнятися від статичної внаслідок інерційності процесів у подібних елементах. Так, наприклад, різко відрізняються статичні та динамічні

характеристики ламп розжарювання, термісторів та інших нелінійних опорів, зміна властивостей яких обумовлена змінами  $t^0$ .

На графіку  $ВАХ$  терморезистора (рис. 11.1) показано частину  $ВАХ$ , яка знята при сумісному протіканні сталого та змінного струму (криві в околиці точки  $P$ ) при високій частоті зміни струму (безперервна лінія) та низькій частоті (переривчаста лінія). Також різний вигляд має петля гістерезису ферромагнітних матеріалів при різних частотах перемагнічування (рис. 11.2).

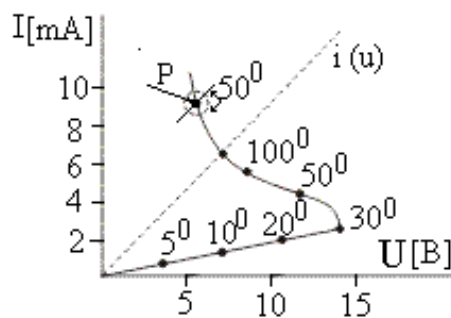


Рис. 11.1.

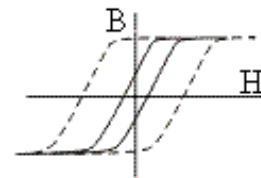


Рис. 11.2

З динамічної характеристики визначають динамічний опір та провідність  $HE$

$$r_d = \frac{du}{di}; g_d = \frac{di}{du}.$$

Для урахування взаємозв'язку між діючими значеннями струму та напруги вводять параметр еквівалентний опір та провідність  $HE$

$$r_e = \frac{U_d}{I_d}; g_e = \frac{1}{r_e}.$$

При зміні параметрів усталеного режиму будуть змінюватися діючі значення струмів та напруг в  $HE$ , а, отже, їх еквівалентні опори. Тому для подібних елементів (умовно-нелінійних) метод накладання застосовувати не можна.

## **11.2 Методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму**

Процеси в нелінійних колах з безінерційними елементами описують нелінійними алгебраїчними або диференційними рівняннями, теорія яких розроблена значно гірше, ніж лінійних рівнянь. Тому при розрахунку усталених процесів в нелінійних колах змінного струму широке застосування крім аналітичних, мають також чисельні та графічні методи.

Для інженерної практики у більшості випадків необхідні наближені, орієнтовні розрахункові співвідношення, які б давали кількісну оцінку процесів, що відбуваються в нелінійних колах.

Тому, на відміну від теорії лінійних кіл, де рішення можна одержати з будь-якою точністю, основою теорії нелінійних кіл є одержання наближених рішень, що дають, переважно, якісну оцінку процесів. Тому при розгляді явищ в нелінійних електричних колах перевагу віддають простоті та наочності метода розрахунку і можливості оцінки явища без його точного кількісного аналізу, який в разі необхідності завжди можна провести чисельними методами на комп'ютері.

### **11.2.1. Метод проекцій**

У лінійних колах параметри елементів вибирають таким чином, щоб забезпечити задані величини струмів та напруг в елементах. Форма струмів та напруг в елементах електричного кола завжди повторює форму вхідної дії.

У нелінійних колах *НЕ* впливає не тільки на величину струмів та напруг в електричному колі, але й на їх форму. При цьому форма струмів та напруг на елементах нелінійного кола завжди відрізняється від форми вхідної дії.

У багатьох галузях застосування (наприклад, в інформаційній електроніці) головним завданням нелінійних кіл є насамперед зміни форми діючого струму або напруги.



Тому метод розрахунку нелінійних кіл, що застосовується, повинен давати змогу визначати миттєві значення струмів та напруг в елементах електричного кола, бо саме вони визначають форму сигналу. У цьому плані найбільш зручним та наочним є графічний метод розрахунку, який називають методом проекцій. Розглянемо суть цього метода на прикладі визначення струму через нелінійний елемент при відомій формі прикладеної напруги.

Рішення починають з побудови *ВАХ НЕ* (рис. 11.3).

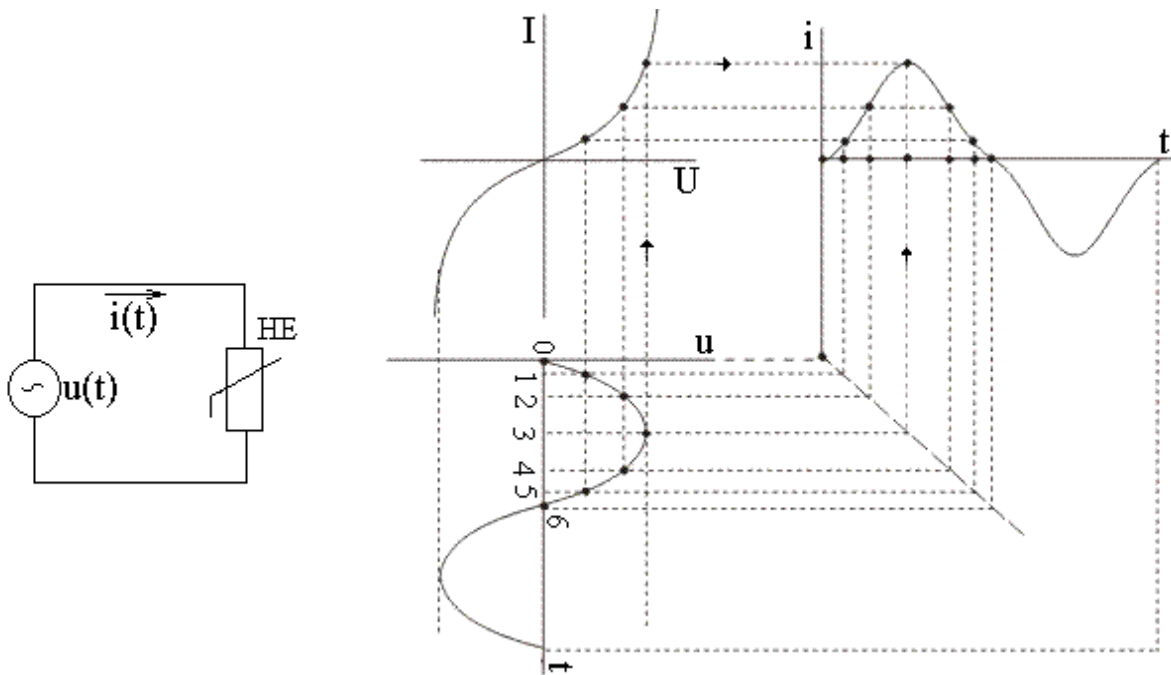


Рис. 11.3

Вибирають вхідний та вихідний параметр. Нехай вхідним параметром є діюча напруга, а вихідним – струм через *НЕ*. Після цього будують графік вхідної дії (вхідну напругу), як функцію часу. Вісь графіка вхідної напруги розташовують узгоджено з віссю напруг *ВАХ НЕ*, причому масштаб на обох осях повинен бути той самий. При цьому вісь часу *t* буде направлена униз. Далі будують осі системи координат для побудови графіка вихідної величини (реакції) – струму через *НЕ*. Вісь струмів розташовують узгоджено з віссю струмів *ВАХ НЕ*, причому масштаби на цих осях також повинні бути

однаковими. Масштаби на осях часу  $t$  обох графіків бажано вибирати однаковим.

Почергово роблячи проекції ряду точок вхідного сигналу на ВАХ НЕ, а потім переносячи одержані значення вихідної реакції на її графік одержуємо відповідні точки вихідного сигналу.

Розглянутий приклад показує як визначити струм через НЕ при відомій формі прикладеної напруги. Якщо нас цікавить струм у якомусь нелінійному колі, при заданій формі прикладеної напруги, треба спочатку побудувати графік сумарної ВАХ цього кола, а потім застосовувати метод проекцій.

### **Лекція 12. Передавальні характеристики електричного кола**

Найчастіше при розрахунках нелінійних кіл змінного струму виникає задача визначення напруги або струму в якомусь елементі при відомій дії на вході.

У таких випадках ланцюг можна розглядати як чотирьохполюсник (рис. 12.1), на вхідні клеми якого (1, 2) подається вхідна дія ( $u_{вх}$ ,  $i_{вх}$ ), а до вихідних клем (3, 4) підключено елемент  $Z$ , в якому треба визначити напругу або струм ( $u_{вих}$ ,  $i_{вих}$ ).

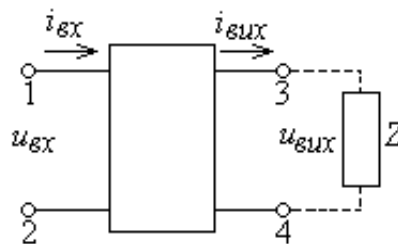


Рис. 12.1

Оскільки електричний ланцюг є нелінійним, параметри чотирьохполюсника також будуть нелінійними функціями параметрів його елементів.

Часові діаграми зміни вихідної величини при відомому характері зміни вхідної також можна побудувати методом проекцій. Однак для цього треба мати графік залежності вихідної величини від вхідної. Такий графік називають передавальною характеристикою кола.

Залежно від того, що є вхідною величиною та який параметр нас цікавить на виході, можна розглядати чотири типи передавальних характеристик.

- |                           |                           |
|---------------------------|---------------------------|
| 1) $u_{вих} = f(u_{вх});$ | 3) $i_{вих} = f(u_{вх});$ |
| 2) $u_{вих} = f(i_{вх});$ | 4) $i_{вих} = f(i_{вх}).$ |

Передавальну характеристику можна розрахувати аналітично, зняти експериментально або побудувати графічно.

Для цього відомими методами будують  $ВАХ$  нелінійного кола (рис. 12.2) відносно вхідних клем 1, 2 (рис. 12.3). Результати побудови потім використовуються для побудови графіка передавальної характеристики.

**Приклад.** Почергово задаючи значення вхідної напруги (точки 1, 2) на графіку побудови сумарної  $ВАХ$  (рис. 12.3) визначають відповідні значення вихідної величини (точки 1', 2'). Ці значення відкладають у новій системі координат  $u_{вих} = f(u_{вх})$  (рис. 12.4).

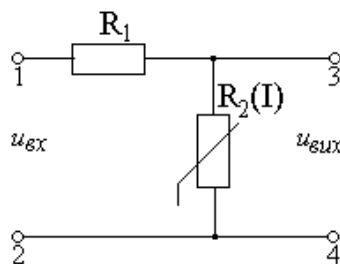


Рис. 12.2

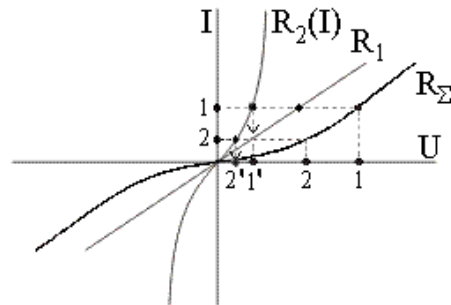


Рис 12.3.

Відклавши відповідну кількість точок та з'єднавши їх плавною лінією одержимо графік передавальної характеристики (рис. 12.4). Після цього методом проекцій будуюмо часову діаграму вихідної напруги за заданою формою вхідної напруги.

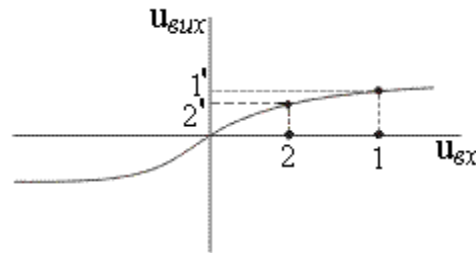


Рис. 12.4

Недоліком розглянутої методики побудови методом проекцій є те, що графіки вхідного та вихідного сигналів розташовані у різних місцях рисунка (рис. 11.3), що утруднює їх порівняння. Зручніше розташовувати ці графіки один під одним. Для цього використовують відрізок прямої лінії, розташований під кутом  $45^\circ$  до осей, за допомогою якого здійснюється перетворення вертикального розташування осі у горизонтальне (рис.12.5).

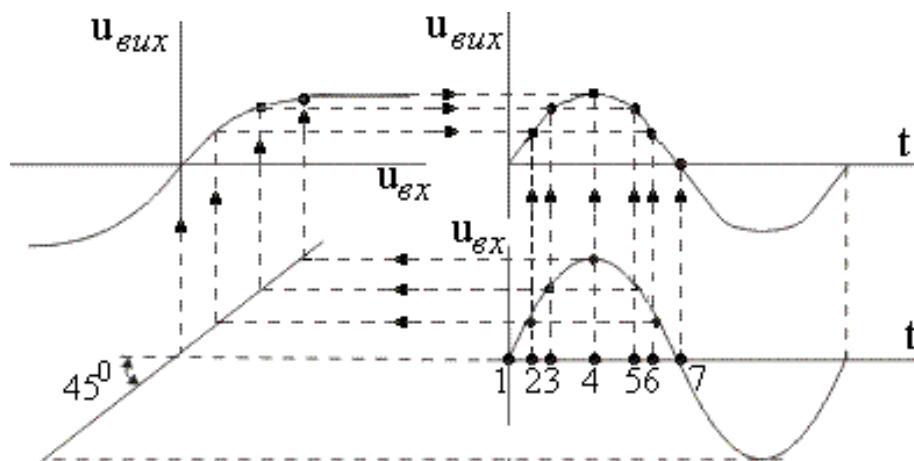


Рис. 12.5.

Порівнюючи два розглянуті приклади побудови форми вихідного сигналу методом проекцій можна зробити такі висновки.

- 1). Якщо характеристика кола монотонна і має увігнуту форму, вихідна реакція кола буде мати більш гостру форму, ніж вхідна дія;
- 2). Якщо характеристика кола має випуклу форму, то реакція кола буде мати більш плоску форму ніж вхідна дія;
- 3). Якщо вхідний сигнал має прямокутну форму, вихідний сигнал також буде мати прямокутну форму, проте амплітуда вихідного сигналу буде

змінюватися не пропорційно до вхідного.

Таким чином, перевагою метода проєкцій є його простота та наочність. Крім того, цей метод дозволяє по заданій формі сигналу на вході та бажаній формі сигналу на виході (або навпаки), побудувати графік необхідної передавальної характеристики кола.

**Приклад.** Визначимо графік передавальної характеристики кола для перетворення сигналу трикутної форми в сигнал трапецієподібної форми (рис. 12.6).

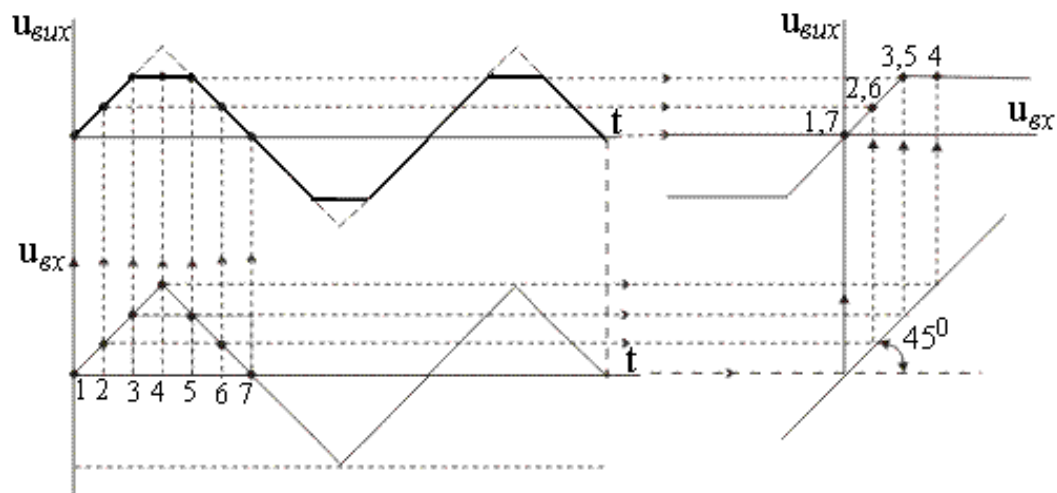


Рис. 12.6.

Визначивши графік бажаної  $BAX$  або передавальної характеристики, вибирають нелінійний елемент з підходящою  $BAX$ .

Якщо бажана характеристика кола є досить складною, здійснюють її кусочно-лінійну апроксимацію, а потім за допомогою найпростіших ідеалізованих елементів моделюють кожну лінійну ділянку характеристики відповідною лінійною гілкою.

## 12.1 Аналітичні методи розрахунку нелінійних кіл змінного струму

Застосування аналітичних методів розрахунку вимагає апроксимації  $BAX$

*НЕ* або передавальної характеристики кола якою-небудь досить простою функцією, наприклад поліномом. У найпростіших випадках аналітичний метод полягає у безпосередньому розв'язанні рівняння кола (якщо це можливо).

**Приклад.** На нелінійний елемент  $r(I)$  діє синусоїдальна напруга  $u(t) = U_m \sin \omega t$  (рис. 12.7).

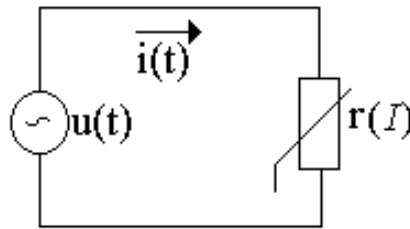


Рис. 12.7.

*ВАХ НЕ* апроксимується виразом  $i = aU^3$ .

Отже струм в електричному колі

$$i(t) = a(u(t))^3 = aU_m^3 \sin^3 \omega t.$$

Одержаний вираз визначає струм, що протікає в електричному колі і дає можливість визначити миттєве значення струму  $i(t)$  в будь-який момент часу, а також побудувати графік зміни цього струму.

У той же час аналітичний вираз дає можливість оцінити деякі більш загальні закономірності процесу та зробити певні узагальнення. Так, для розглянутого випадку застосувавши відому з тригонометрії формулу

$$\sin^3 \omega t = \frac{1}{4}(3\sin \omega t - \sin 3\omega t),$$

одержимо інший вираз для струму

$$i(t) = aU_m^3 \sin^3 \omega t = \frac{3}{4}aU_m^3 \sin \omega t - \frac{1}{4}aU_m^3 \sin 3\omega t.$$

З одержаного виразу випливає, що:

- 1) струм в нелінійному елементі при дії синусоїдальної напруги є несинусоїдальним;
- 2) для розглянутого випадку він містить 1-у та 3-ю гармоніки.

Таким чином, нелінійний елемент електричного кола перетворює спектр вхідного сигналу.

У загальному випадку аналітичний розрахунок нелінійних кіл змінного струму є досить складним, оскільки тут не можуть бути використані векторні діаграми та комплексна форма запису. Розрахунок треба вести для миттєвих значень струмів та напруг. Причому внаслідок нелінійності кола метод накладання застосовувати не можна.

### **Лекція 13. Перетворення спектру сигналу електричними колами**

Однією з найважливіших властивостей електричних кіл є можливість перетворення спектрального складу вхідного сигналу. Вона полягає у тому, що при дії на вході кола гармонічного або періодичного сигналу, який складається із суми кількох гармонік різних частот, реакція кола (струм або напруга) будуть містити крім гармонік вхідної дії також нові гармоніки, яких не було у вхідному сигналі. При цьому частоти нових гармонічних складових можуть бути як кратними, так і не кратними до основної частоти сигналу вхідної дії.

Розглянемо можливості такого перетворення у різних класах електричних кіл.

#### **13.1 Лінійні кола**

Напруга на лінійному резисторі описується законом Ома

$$U = IR.$$

Нехай через резистор протікає струм, що дорівнює сумі двох синусоїдальних струмів

$$i_1(t) = I_{1m} \cos \omega_1 t; \quad i_2(t) = I_{2m} \cos \omega_2 t;$$

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t).$$

При цьому напруга

$$u(t) = [i_1(t) + i_2(t)]R = I_{1m}R \cos \omega_1 t + I_{2m}R \cos \omega_2 t.$$

Отже, реакція кола містить тільки ті гармонічні складові, які були у спектрі вхідної дії. Таким чином, у лінійних колах нові спектральні складові не створюються, оскільки реакція кола на кожну спектральну складову вхідної дії являє собою синусоїдальне коливання тієї ж самої частоти (рис. 13.1). Може змінюватися тільки співвідношення між амплітудами гармонічних складових вхідної дії та реакції (в колах з реактивними елементами).

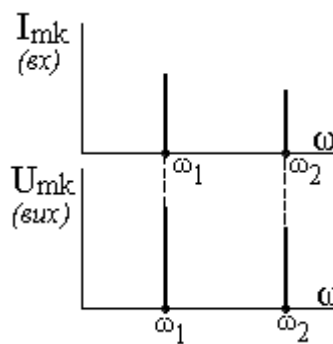


Рис. 13.1

### 13.2. Лінійні параметричні кола

Напруга на параметричному опорі дорівнює

$$u(t) = i(t)R(t).$$

Нехай опір параметричного елемента змінюється за законом  $R(t) = R_0(1 + a \cos \Omega t)$  (рис. 13.2).

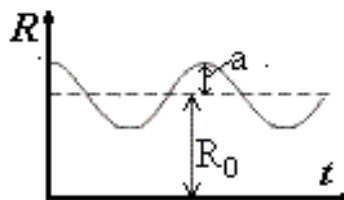


Рис. 13.2.



Якщо через такий елемент протікає гармонічний струм  $i(t) = I_m \cos \omega_0 t$ , то напруга на такому елементі

$$u(t) = i(t)R(t) = I_m R_0 \cos \omega_0 t + a I_m R_0 \cos \Omega t \cos \omega_0 t.$$

Скористаємося відомою формулою тригонометричних перетворень

$$A \cos \alpha \cos \beta = \frac{A}{2} \cos(\alpha + \beta) + \frac{A}{2} \cos(\alpha - \beta).$$

З урахуванням останньої формули

$$u(t) = I_m R_0 \cos \omega_0 t + \frac{a I_m R_0}{2} \cos(\omega_0 + \Omega)t + \frac{a I_m R_0}{2} \cos(\omega_0 - \Omega)t.$$

Незважаючи на те, що вхідна дія  $i(t)$  містить тільки одну гармоніку  $\omega_0$ , вихідна реакція  $u(t)$  містить уже три гармоніки з частотами  $\omega_0$ ,  $\omega_0 + \Omega$ ,  $\omega_0 - \Omega$  (рис. 13.3).

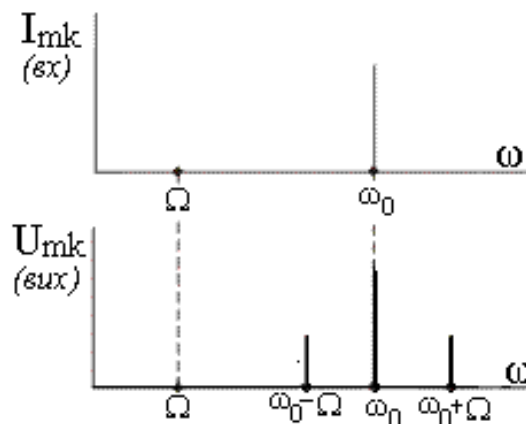


Рис. 13.3.

Це означає, що у лінійних параметричних колах створюються нові спектральні складові.

### 13.3. Нелінійні кола

Нехай напруга на нелінійному резисторі

$$U = AI^2$$

і струм, що протікає

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = I_{1m} \cos \omega_0 t + I_{2m} \cos \Omega t.$$

Тоді

$$\begin{aligned} u(t) &= A(I_{1m} \cos \omega_0 t + I_{2m} \cos \Omega t)^2 = \\ &= AI_{1m}^2 \cos^2 \omega_0 t + AI_{2m}^2 \cos^2 \Omega t + 2AI_{1m}I_{2m} \cos \omega_0 t \cos \Omega t. \end{aligned}$$

Або з урахуванням формул тригонометричних перетворень

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{A}{2} I_{1m}^2 (1 + \cos 2\omega_0 t) + \frac{A}{2} I_{2m}^2 (1 + \cos 2\Omega t) + \\ &+ AI_{1m}I_{2m} \cos(\omega_0 + \Omega)t + AI_{1m}I_{2m} \cos(\omega_0 - \Omega)t. \end{aligned}$$

Як випливає з одержаного виразу усі спектральні складові вихідної реакції є новими і відсутні у вхідній дії (рис. 13.4).

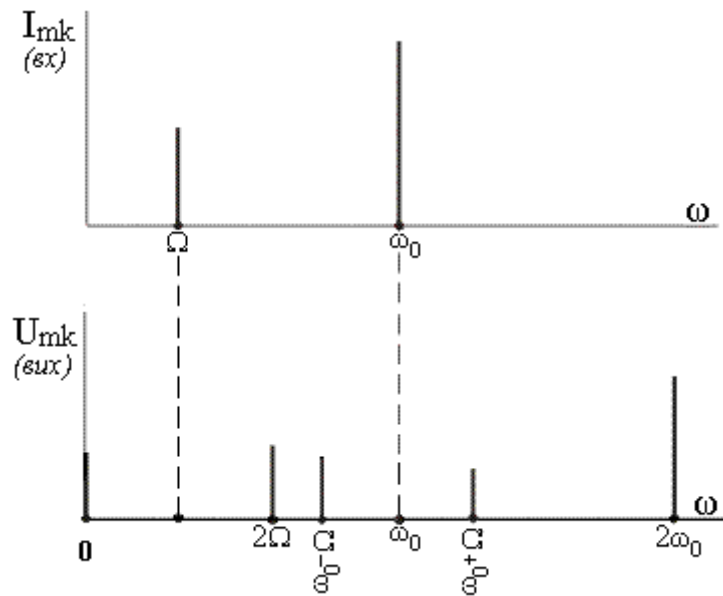


Рис. 13.4

Саме у цьому і полягає одна з найважливіших властивостей нелінійних кіл, яка має широке практичне застосування – у нелінійних колах завжди виникають нові спектральні складові. Очевидно, що амплітуди та частоти нових гармонічних складових у загальному випадку залежать від характеру *ВАХ НЕ*.

Розглянемо спектральний склад реакції *НЕ*, *ВАХ* якого апроксимована поліномом  $n$  – го ступеня.

$$i = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n.$$

### 13.4 Дія на нелінійний елемент гармонічного сигналу

Нехай на *HE* діє гармонічна напруга

$$u(t) = U_m \cos \omega t.$$

Для знаходження струму в електричному колі гармонічну функцію треба піднести до відповідних ступенів і скласти одержані результати.

Відповідно до тригонометричних формул ступені гармонічної функції можна замінити гармонічними функціями кратних частот.

**Приклад.** Для  $k = 2$ ;  $U_m^2 \cos^2 \omega t = \frac{U_m^2}{2} (1 + \cos 2\omega t)$ ;  $k = 3$ ;

$$U_m^3 \cos^3 \omega t = \frac{U_m^3}{4} (3 \cos \omega t + \cos 3\omega t).$$

Якщо розглянути формули для інших, більш високих ступенів, можна зробити висновок, що гармонічна функція ступеню  $n$  еквівалентна сумі гармонічних функцій кратних частот, тобто тригонометричному поліному. Причому парному ступеню відповідає сума парних гармонік, включаючи нульову. Непарному ступеню – сума непарних гармонік.

Найбільша частота гармоніки, що дорівнює  $n\omega$ , визначається старшим ступенем полінома *ВАХ HE*.

$$i(t) = I_0 + \sum_{k=1}^n I_k \cos k\omega t.$$

Таким чином, реакція нелінійного резистивного кола на гармонічну дію є несинусоїдальною періодичною функцією, що складається з суми гармонік до  $n$ -ї включно, де  $n$  – старша ступінь полінома, який апроксимує *ВАХ HE*.

### 13.5. Дія на нелінійний елемент суми двох гармонічних сигналів

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) = U_1 \cos \omega_1 t + U_2 \cos \omega_2 t.$$

$$i(t) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2 + \dots + a_n u^n.$$

Оскільки *ВАХ НЕ* апроксимується поліномом *n*-го ступеня, реакцію кола можна подати у такому вигляді

$$i(t) = a_0 + a_1(u_1 + u_2) + a_2(u_1 + u_2)^2 + \dots + a_n(u_1 + u_2)^n.$$

$$\begin{aligned} \text{Для } n = 2, \quad (u_1 + u_2)^2 &= u_1^2 + 2u_1u_2 + u_2^2; \quad n = 3, \\ (u_1 + u_2)^3 &= u_1^3 + 3u_1^2u_2 + 3u_1u_2^2 + u_2^3. \end{aligned}$$

Таким чином, на відміну від дії одного сигналу, при дії суми кількох сигналів одержуємо додаткові складові, які дорівнюють добутку складових у різних ступенях, тобто, у загальному випадку біноміальні члени  $u_1^{n-m}u_2^m$ , де  $m = 1, 2 \dots n$ .

Як впливає з попереднього приклада, ступені гармонічних функцій дають суми гармонік кратних частот.

Відповідно до тригонометричних формул, добуток двох гармонічних функцій дає гармонічні функції, частоти яких дорівнюють різниці або сумі вихідних частот.

$$\cos \omega_1 t \cdot \cos \omega_2 t = \frac{1}{2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t].$$

Частоти гармонічних функцій у правій частині виразу дорівнюють різницям та сумах частот, кратних до  $\omega_1$  та  $\omega_2$ :

$$\omega_1 \pm \omega_2; 2\omega_1 \pm \omega_2; \omega_1 \pm 2\omega_2.$$

Або у загальному вигляді

$\omega_{mn} = (n - m)\omega_1 \pm m\omega_2$ , де  $m = 1, 2 \dots n$  визначається ступенями функції з частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$ .

Гармонічні коливання з частотами  $\omega_{mn}$ , які визначаються різницею або сумою частот, кратних частотам діючих сигналів, називають комбінаційними коливаннями.

Суми абсолютних значень цілих чисел  $m$  та  $n$ , що задають кратність складових частот, називають порядком комбінаційних коливань.

Таким чином, реакція від дії на нелінійний ланцюг сигналу, який являє собою суму двох гармонічних коливань, складається з гармонічних коливань кратних частот (до  $n$ -го порядку включно), а також комбінаційних частот до  $n$ -го порядку.

Оскільки у загальному випадку частоти  $\omega_{mn}$  не є кратними частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$ , вихідна реакція у загальному випадку не є періодичною функцією.

Подібні коливання називають квазіперіодичними (майже періодичними). І тільки у тому випадку, коли частоти  $\omega_1$  та  $\omega_2$  є кратними, вихідна реакція буде періодичною функцією.

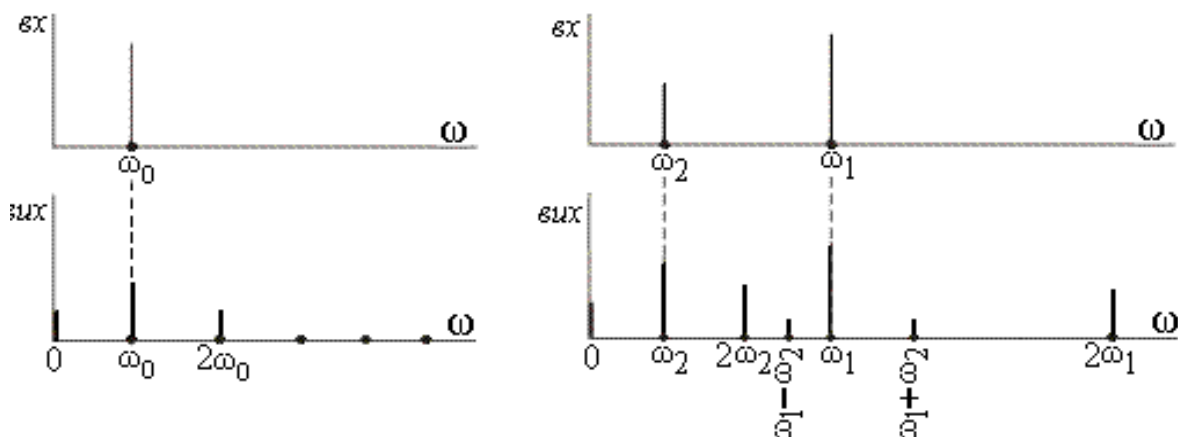
**Приклад.** Нехай  $ВАХ НЕ$  апроксимується поліномом другого ступеня

$$i(t) = a_0 + a_1 u + a_2 u^2.$$

При цьому спектри вихідного сигналу при дії на вході гармонічного сигналу однієї частоти  $\omega_0$ , а також суми двох гармонічних сигналів з частотами  $\omega_1$  та  $\omega_2$  будуть такими як на рис. 13.5.

Амплітуди гармонік та комбінаційних коливань суттєво залежать від коефіцієнтів  $a_k$  поліному апроксимації.

Перетворення спектру сигналу нелінійним ланцюгом широко застосовується у різних пристроях.



### **13.6. Метод еквівалентних синусоїд**

На відміну від інформаційної електроніки, в енергетичній (силовій) електроніці, а також в електротехніці нас цікавить енергетична дія електричного струму. При цьому форма струмів та напруг (інформаційні характеристики) мають другорядне значення.

У таких випадках для розрахунків широко застосовують наближені методи, які засновані на заміні дійсних несинусоїдальних кривих струму та напруги еквівалентними синусоїдами, діюче значення якої те ж саме, що і реального струму, або напруги.

Однак при цьому треба пам'ятати, що комплексний опір електричного кола залежить від струму. Внаслідок цього, алгебраїчні рівняння, записані у комплексній формі залишаються нелінійними.

## **РОЗДІЛ IV. ЗАСТОСУВАННЯ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ЕЛЕКТРИЧНОГО КОЛА**

**Лекція 14. Перетворення форми електричних сигналів за допомогою нелінійних кіл**

Наявність нелінійного елемента в ланцюзі значно ускладнює задачу аналізу процесів у таких колах та їх розрахунок. Тому, якщо наявність нелінійного елемента не призводить до появи суттєво нових явищ в ланцюзі, то такий *НЕ* по можливості замінюють лінійним або намагаються лінеаризувати його характеристики. У більшості випадків нелінійні елементи використовують для того, щоб одержати принципово нові явища, які не можуть бути реалізовані у лінійних колах. Саме на використанні різних типів *НЕ* заснований принцип дії багатьох електротехнічних та більшості електронних пристроїв.

### **14.1 Нелінійні кола сталого струму**

За допомогою нелінійних кіл сталого струму можна реалізувати ряд пристроїв, які не можна побудувати на основі лінійних елементів електричного кола.

#### **14.1.1 Параметричний стабілізатор**

Параметричний стабілізатор (рис. 14.1) дає можливість підтримувати сталою вихідну напругу  $U_{вих}$  при змінах напруги на його вході  $U_{вх}$ .

На передавальній характеристиці стабілізатора є ділянка стабілізації, на якій при зміні входньої напруги у широких межах, вихідна напруга майже не змінюється (рис.14.2).

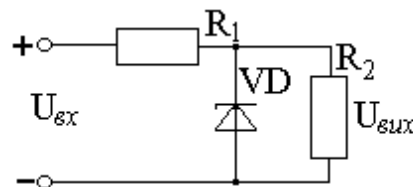


Рис. 14.1

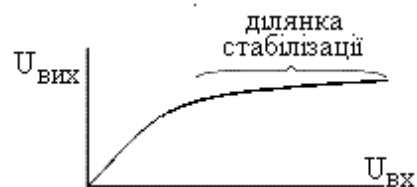


Рис. 14.2

#### **14.1.2. Мостова схема порівняння**

У момент зміни полярності напруги на виході  $U_{ab}$  робимо висновок, що напруга на вході  $U_{вх}$  досягла заданої величини (рис. 14.3).

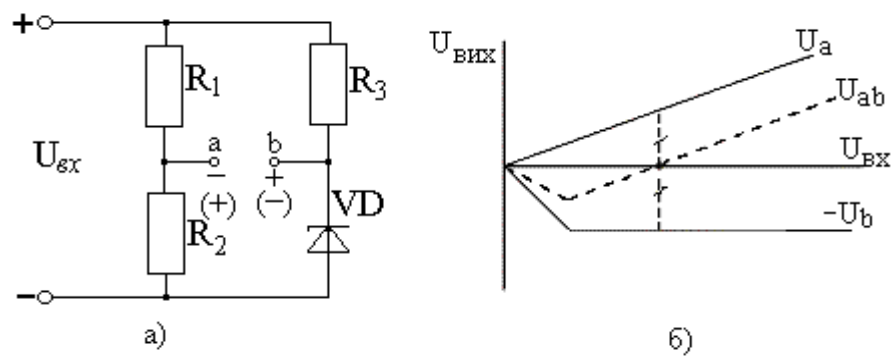


Рис. 14.3

## 14.2. Нелінійні кола змінного струму при дії змінної напруги однієї частоти

### 14.2.1 Обмеження амплітуди та стабілізація діючого значення напруги

з передавальними характеристиками виду (рис. 12.4) дозволяють обмежувати амплітуду вхідної напруги. Їх можна застосовувати для формування з синусоїди напругу прямокутної форми (рис.14.4.) Оскільки амплітуда вихідної напруги є обмеженою, діюче значення цієї напруги буде змінюватися у невеликих межах при досить значних змінах амплітуди вхідної напруги.

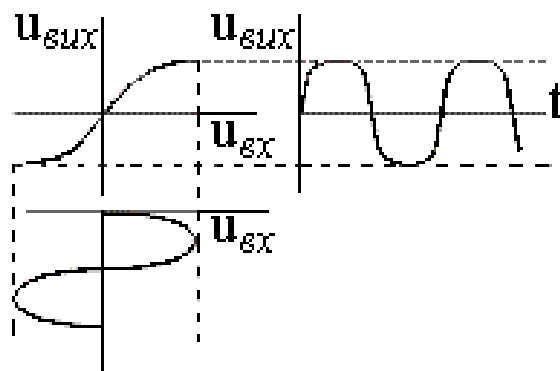


Рис.14.4

### 14.2.2. Випрямлення змінної напруги



При застосуванні вентильних елементів передавальна характеристика кола є суттєво несиметричною. Такий ланцюг перетворює змінну напругу в однополярну пульсуючу (рис. 14.5, а). На відміну від вхідної синусоїдальної напруги, у вихідній напрузі присутня стала складова, а також гармонічні складові. Якщо на виході такого кола поставити фільтр *НЧ* з відповідною частотою зрізу, на виході можна одержати сталу напругу (рис.14.5, б).

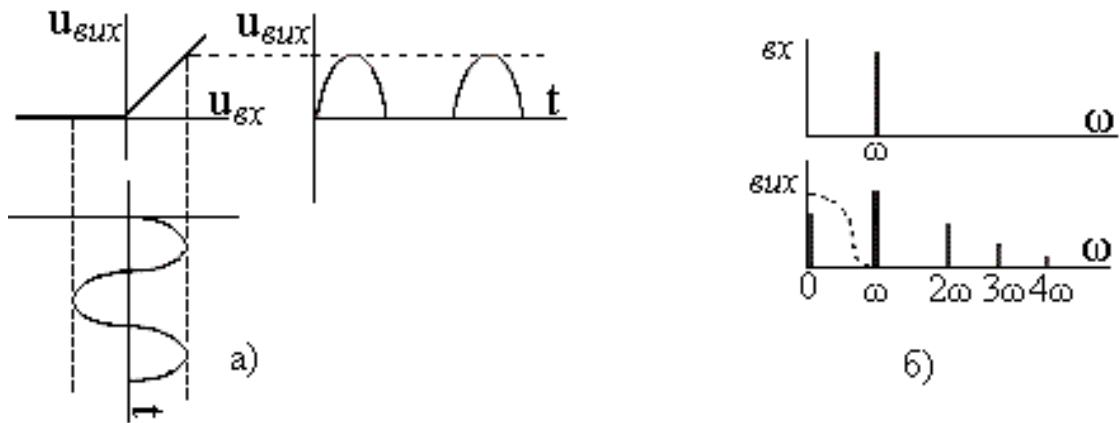


Рис.14.5

### 14.2.3. Помноження частоти вхідного сигналу

При дії на *НЕ* гармонічного сигналу з частотою  $\omega$ , вихідна реакція буде містити гармоніки кратних частот.

Із спектра одержаного сигналу можна виділити будь-яку необхідну гармоніку, поставивши на виході полосовий фільтр, настроєний на цю гармоніку (рис. 14.6). Характеристику *НЕ* треба вибрати таким чином, щоб у спектрі вихідного сигналу амплітуда відповідної гармоніки була достатньою для її подальшої обробки.

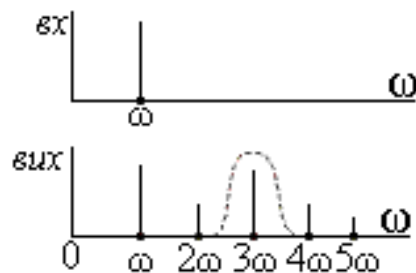


Рис.14.6

#### 14.2.4. Релейний ефект

Релейний ефект – це стрибкоподібна зміна вихідної величин при плавній зміні вхідної.

У нелінійних елементах з немонотонною характеристикою ділянка з негативним диференціальним опором найчастіше є нестійкою. Тому при плавній зміні вхідної величини в певні моменти часу вихідна величини буде змінюватися стрибкоподібно (з точки  $a$  в  $a'$ , а потім з точки  $b$  в  $b'$ ) (рис. 14.7).

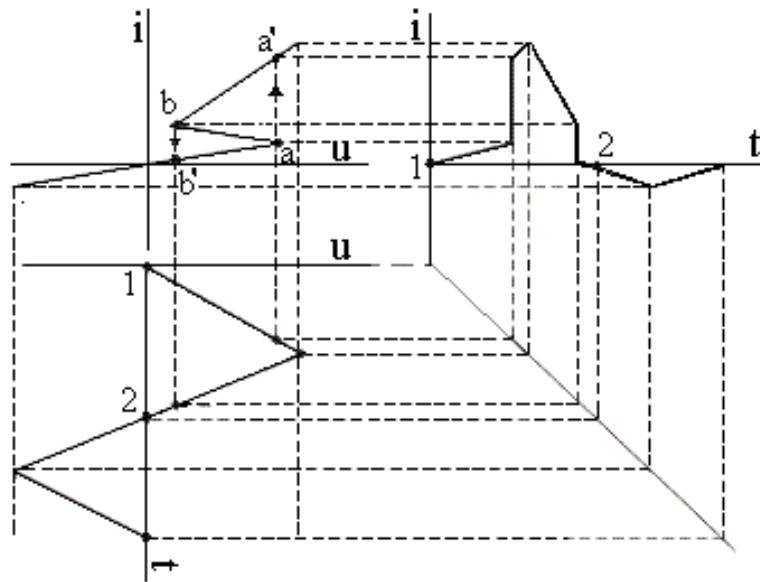


Рис.14.7

При цьому переміщення робочої точки по характеристиці  $HE$  нагадує переміщення робочої точки по петлі гістерезису. Однак у цьому випадку моменти проходження через нуль вхідної та вихідної величини збігаються.

#### 14.2.5. Гістерезис

Якщо гістерезисна характеристика симетрична відносно початку системи координат, то у загальному випадку моменти проходження через нуль вхідного та вихідного сигналу не збігаються. Вихідний сигнал запізнюється по відношенню до вхідного (рис. 14.8). На основі кіл з релейною та гістерезисною

характеристиками будують формувачі імпульсів, порогові пристрої та ключові схеми.

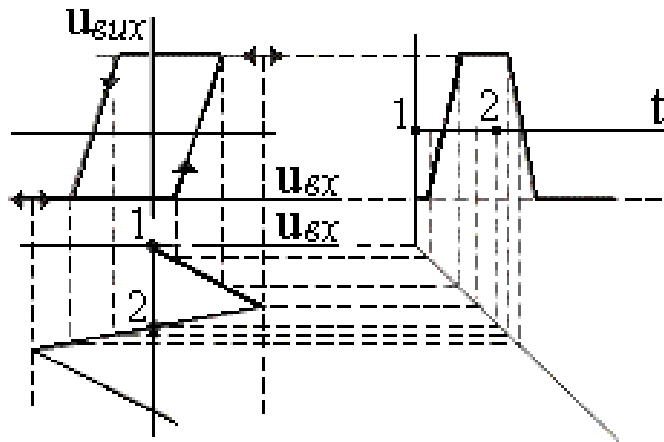


Рис.14.8

### 14.3 Дія на нелінійний ланцюг двох джерел напруги з різними частотами

#### 14.3.1 Одночасна дія джерел сталого та змінного струму

Включення джерела сталого струму в нелінійне коло зміщує початкову робочу точку на  $BAX$  кола, що еквівалентно зміщенню  $BAX$  відносно початку системи координат. При цьому якщо  $BAX$  кола була симетричною, то тепер вона буде забезпечувати несиметричну залежність вихідної величини від вхідної.

Якщо змінювати напругу джерела сталого струму, буде змінюватися робоча точка на  $BAX HE$ . При цьому нелінійний елемент буде працювати на ділянках з різним диференціальним опором.

У разі дії в ланцюзі ще одного джерела змінної напруги з частотою  $\omega$ , то опір  $HE$  для змінного струму буде залежати від положення робочої точки, тобто від напруги джерела сталого струму. Змінюючи напругу джерела сталого струму можна впливати на величину струму джерела змінного струму, тобто

керувати величиною цього струму. На цьому явищі базується принцип дії таких пристроїв, як підсилювач та модулятор сигналів.

### 14.3.2 Зміщення початкової робочої точки

Якщо в електричне коло з вентилям, в якому діє джерело змінної напруги  $e(t)$  (рис. 14.9) додатково ввести джерело сталої напруги  $E$ , то залежно від величини та полярності включення цього джерела, буде змінюватися рівень напруги джерела  $e(t)$  при якому відбувається відкривання вентиля (рис. 14.10). Таким чином тривалість протікання струму в електричному колі також буде залежати від величини та полярності напруги допоміжного джерела сталої напруги  $E$ .

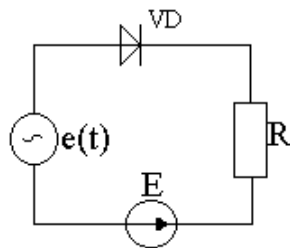


Рис.14.9

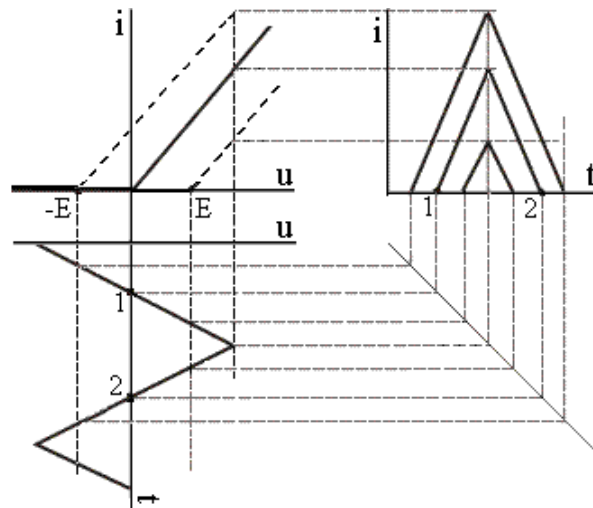


Рис.14.10

## 14.4 Принципи одержання модульованих коливань

Якщо на вході нелінійного кола (рис.14.11),  $ВАХ$  якого показано на рис. 14.12, діють дві напруги  $u_1$  та  $u_2$ , причому  $u_1 = U_m \sin \omega t$ , а  $u_2 = U$ , то залежно від величини напруги  $U$   $HE$  буде працювати на різних ділянках  $ВАХ$ .

При  $u_2 = U_a$  диференційний опір  $HE$  є значним і амплітуда змінного струму буде малою. При  $u_2 = U_b$  диференційний опір  $HE$  є малим. Тому амплітуда змінного струму в електричному колі буде значною. (В обох випадках амплітуда вхідної напруги  $u_1(t) = U_{m1} \sin \omega t$  однакова).

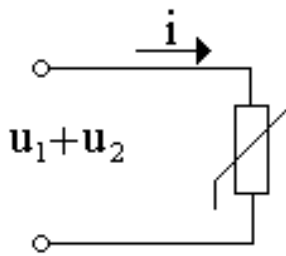


Рис.14.11

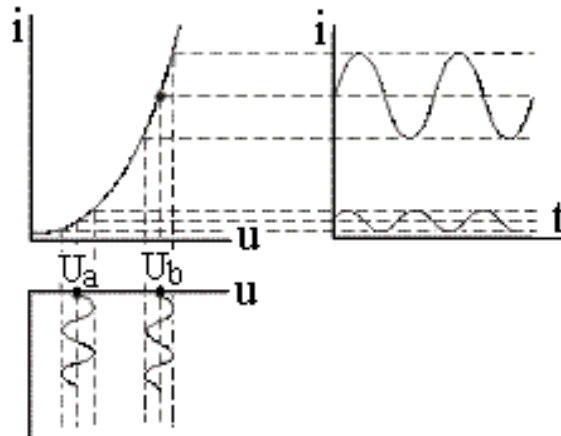


Рис.14.12

Якщо тепер, як джерело  $u_1$  використовувати джерело змінної напруги, частота якого  $\Omega \ll \omega$   $u_2(t) = U_{m2} \sin \Omega t$ , в результаті взаємодії двох джерел напруги амплітуда високочастотних коливань буде змінюватися з частотою  $\Omega$  за законом, який визначає модулююча напруга  $u_2(t)$ .

Модульовані коливання широко застосовують у системах радіозв'язку.

### 14.5 Електронні ключі

В електронних колах широко застосовують різні типи напівпровідникових приладів. З точки зору теорії кіл більшість цих приладів є нелінійними резистивними керованими елементами (транзистор, тиристор, симістор), які мають спеціальний керуючий електрод. Змінюючи величину сигналу керування на цьому електроді можна впливати на опір силового кола.

В одних випадках при плавній зміні сигналу керування опір прилада змінюється плавно. Такі прилади аналогічні керованому змінному опору (наприклад, транзистор в активному режимі).

Інші прилади при плавній зміні сигналу керування свій опір змінюють стрибкоподібно (дискретно), від дуже великої величини до дуже малої та навпаки (тиристор, симістор). Такі прилади аналогічні перемикачу (керованому

ключу), який під дією сигналу керування перемикається з вимкненого стану у ввімкнений і навпаки.

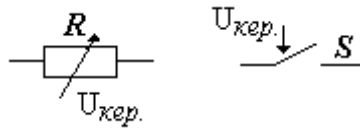


Рис.14.13

В теорії кіл вводять поняття ідеальний ключ, який має такі властивості:  
 $r_{ввм} = 0; r_{вим} = \infty, t_{пер} = 0$ .

Реальні напівпровідникові прилади не є ідеальними ключами, проте для них, як правило виконується умова  $r_{ввм} \rightarrow 0; r_{вим} \rightarrow \infty, t_{пер} \rightarrow 0$  (рис.14.14). Якщо ланцюг містить лінійні елементи та ключі, можна вважати, що до та після комутації ланцюг залишається лінійним.

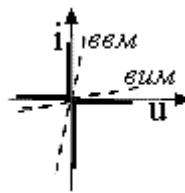


Рис.14.14

Особливість таких кіл полягає у тому, що в момент комутації відбувається дискретна зміна діючої напруги, параметрів окремих елементів або структури кола. Оскільки час перемикання ключа  $t_{пер} = 0$ , вважають, що ланцюг є дискретно-лінійним.

Електронні ключі мають широке застосування в імпульсній та цифровій техніці, в силових електронних пристроях.

За допомогою керованих ключів здійснюється підключення або відключення окремих ділянок або цілого кола. Внаслідок перемикань завжди змінюється режим роботи елементів кола. Якщо ланцюг містить реактивні елементи (індуктивності або ємності) то зміна режиму роботи елементів кола

буде відбуватися поступово, протягом деякого часу. Це явище називають перехідним процесом електричного кола.

**СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ**

1. Бессонов Л.А. Теоретические основы электротехники: Электрические цепи: Учебник. 10-е изд. - М.: Гардарики, 2002. 638 с.
2. Данилов Л.В., Матханов П.Н., Филиппов Е.С. Теория нелинейных электрических цепей. - Л.: Энергоиздат, 1990, - 256 с.
3. Карпов Ю. О., Магас Т. Є.; Теоретичні основи електротехніки. Розділ "Нелінійні електричні і магнітні кола": Навч. посібник для студ. електротехн. спец. / Вінниц. держ. техн. ун-т. - Вінниця: ВДТУ, 2001. - 134 с..
4. Матханов П.Н. Основы анализа электрических цепей. Нелинейные цепи. – М.: Высшая школа, 1986. – 352 с.
5. Основы теории цепей. Г.В. Зевеке, П.А.Ионкин, А.В.Нетушил, С.В. Страхов. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 527 с.
6. Попов В.П. Основы теории цепей. - М.: Высшая школа, 1985. – 496 с.
7. Сборник задач и упражнений по теоретическим основам электроники: Учеб. пособие для вузов/ под ред. П. А. Ионкина- М.: Энергоиздат, 1982.–768 с.
8. Сборник задач по теоретическим основам электротехники: / под ред. Л. А. Бессонова. – М.: Высшая школа. 1980. – 472 с.
9. Шебес, М. Р. Сборник задач по теории линейных электрических цепей / М. Р. Шебес, М. В. Каблукова. – М.: Высшая школа, 1990. – 544 с.